S-72.060 Signaalit ja järjestelmät
Tentti 14.5.2001

1. Vastaa lyhyesti seuraaviin osatehtäviin, käytä tarvittaessa kuvaa.

a) Mikä ominaisuuksista ortogonaalinen ja ortonormaalinen kuvaa paremmin Fourier-sarjaa ja miksi?

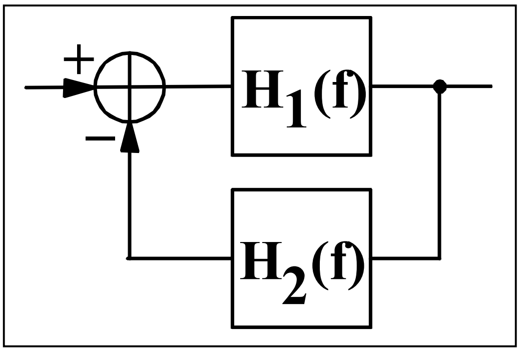
b) Esitä jokin impulssifunktion määritelmä.

c) DFT:lla tutkitaan signaalin spektri taajuusalueella 0…1024 kHz käyttäen 1024 näytettä. Kuinka suuri on näyteväli aika- ja taajuusalueessa?

d) Mikä on näytejonon {4,3,2,1} Z-muunnos?

e) Mitä tarkoitetaan suodattimen päästö- ja estokaistalla?

f) Esitä oheisen, negatiivisesti takaisinkytketyn järjestelmän siirtofunktio kuvassa annettujen siirtofunktioiden avulla.



g) Miten lasketaan keskiarvo ja varianssi, kun tunnetaan satunnaismuuttujan tiheysfunktio $p_{\mathbf{x}}(x)$?

h) Millä tavalla eroavat näytesignaalien spektrit luonnollisessa ja hetkellisessä näytteenotossa?

i) $x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_o t) - x_s(t)\sin(2\pi f_o t)$ on kaistanpäästösignaalin kvadratuuriesityksen lauseke. Esitä kompleksisen verhokäyrän lauseke.

j) AM-modulaatiossa moduloiva signaali on x(t) $\leftrightarrow$ X(f), modulaatioindeksi m ja kantoaaltotaajuus f_c. Esitä AM-modulaation Fourier-muunnoksen lauseke.

Ratkaisu

a) Ortogonaalinen, koska kantafunktioiden energia $\neq 1$

b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1,\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t,\varepsilon)dt\right\} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\{x(t,\varepsilon)\} = \delta(t)$

c) $f_S = 2048000/1024 = 2000$ Hz, $T_S = 1/2048000$ s $= 0{,}48828125\ \mu$s

d) $X(z) = 4 + \frac{3}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^3}$

e) Päästökaista määräytyy sallitun amplitudivaihtelun perusteella estokaistalla on tietty minimivaimennus päästökaistan nimellisvaimennukseen verrattuna

f) $H(f) = \dfrac{H_1(f)}{1 + H_1(f) H_2(f)}$

g) $\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$, $\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 p(x)\, dx$

h) luonnollisessa näytteenotossa $X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n X(f + n f_s)$, missä c_n on näytteenottosignaalin Fourier-sarjan kerroin, eli kukin spektritermi on vääristymätön,

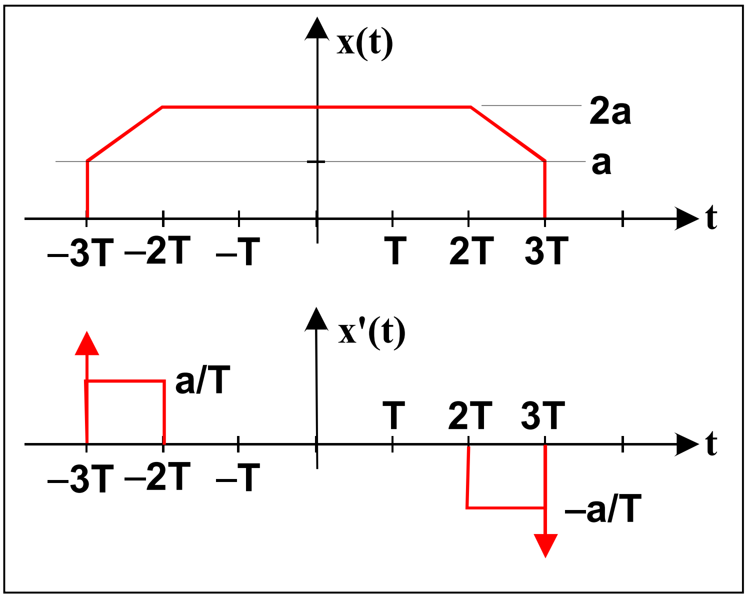
hetkellisessä näytteenotossa $X_s(f) = G(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f + n f_s)$, missä $G(f)$ on näytteenottopulssin Fourier-muunnos, eli kukin spektritermi on lineaarisesti vääristynyt.
(Myös spektripiirrokset kelpaavat vastaukseksi.)

i) $z(t) = x_c(t) + j x_s(t)$

j)

$$S_{AM}(f) = \frac{a_c}{2}\delta(f + f_c) + \frac{a_c}{2}\delta(f - f_c) + \frac{m a_c}{2} X(f + f_c) + \frac{m a_c}{2} X(f - f_c)$$

2. Johda oheisen korotetun trapetsipulssin Fourier-muunnos käyttäen sopivia Fourier-muunnoksen ominaisuuksia



RATKAISU

Löytyy useita ratkaisutapoja.

Derivoimalla saadaan

$$x'(t) = a\delta(t+3T) + \frac{a}{T}\operatorname{rect}\left(\frac{t+2{,}5T}{T}\right) - \frac{a}{T}\operatorname{rect}\left(\frac{t-2{,}5T}{T}\right) - a\delta(t-3T),$$

jolloin

$$F\{x'(t)\} = a\,\mathrm{e}^{j6\pi fT} - a\,\mathrm{e}^{-j6\pi fT} + a\operatorname{sinc}(fT)\,\mathrm{e}^{j5\pi fT} - a\operatorname{sinc}(fT)\,\mathrm{e}^{-j5\pi fT}$$

Derivointikeino antaa

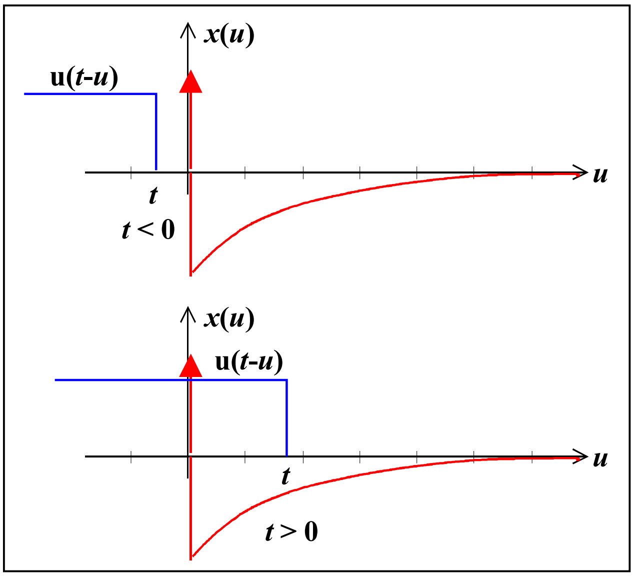
$$X(f) = \frac{F\{x'(t)\}}{j2\pi f} = \frac{j2a\sin(6\pi fT)}{j2\pi f} + \frac{j2a\operatorname{sinc}(fT)\sin(5\pi fT)}{j2\pi f}$$
$$= 6aT\operatorname{sinc}(6fT) + 5aT\operatorname{sinc}(5fT)\operatorname{sinc}(fT)$$

jokin keino, 2p
derivointi OK, 2p
derivaatan F-muunnos OK, 2p
derivointikeino oikein sovellettuna, 2p
F-muunnos OK, 2p

3. $h(t)=\delta(t)-2\pi f_o \,\mathrm{e}^{-2\pi f_o t}\cdot \mathrm{u}(t)$ on RC-ylipäästösuodattimen impulssivaste. Määrää (graafista) konvoluutiota käyttäen sen vaste yksikköaskelsignaalille $\mathrm{u}(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$. $\delta(t)$ on impulssifunktio.

RATKAISU

Kun $t<0$ konvoluutiotulos on =0 (2p)



Kun t ≥ 0 on

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathrm{u}(t)\otimes\delta(t)-\mathrm{u}(t)\otimes\left(\omega_o \exp(-\omega_o t)\,\mathrm{u}(t)\right)\\
&= \mathrm{u}(t)-\left(\int_0^t \omega_o \exp(-\omega_o u)\,du\right)\mathrm{u}(t)\\
&= \mathrm{u}(t)-\left(\Big|_0^t -\exp(-\omega_o u)\right)\mathrm{u}(t)\\
&= \mathrm{u}(t)-\left(1-\exp(-\omega_o t)\right)\mathrm{u}(t)=\exp(-\omega_o t)\,\mathrm{u}(t)
\end{aligned}
$$

konvoluutio impulssifunktion kanssa 3p
toinen käännetty + integraalirajat oikein, 3p
lopputulos oikein 2p

4. Säröisen sinigeneraattorin lähtösignaali on
$x(t)=\cos\left(2\pi f_x t\right)+0{,}02\cos\left(4\pi f_x t\right)+0{,}05\cos\left(6\pi f_x t\right)$.

a) Laske generaattorin kokonaissärökerroin.

b) Särön pienentämiseksi suodatetaan generaattorin lähtösignaali RC-alipäästösuodattimessa, jonka siirtofunktion on
$H(f)=\dfrac{1}{1+j2\pi\left(f/f_x\right)}$. Laske suodatetun signaalin kokonaissärökerroin.

RATKAISU

a) $$d_{tot}=\sqrt{\left(\frac{0{,}02}{1}\right)^2+\left(\frac{0{,}05}{1}\right)^2}=0{,}05385$$ 3p

b) suodatuksen jälkeiset amplitudit:

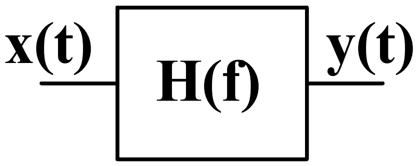
$$f_x:\left|H\left(f_x\right)\right|\cdot a_1=\frac{1}{\sqrt{1+\left(2\pi f_x/f_x\right)^2}}=0{,}1572$$ 3p

$$2f_x:\left|H\left(2f_x\right)\right|\cdot a_1=\frac{0{,}02}{\sqrt{1+\left(4\pi f_x/f_x\right)^2}}=0{,}001587$$ 1,5p

$$3f_x:\left|H\left(3f_x\right)\right|\cdot a_1=\frac{0{,}05}{\sqrt{1+\left(6\pi f_x/f_x\right)^2}}=0{,}002649$$ 1,5p

$$\rightarrow d_{tot}=\sqrt{\left(\frac{0{,}001587}{0{,}1572}\right)^2+\left(\frac{0{,}002649}{0{,}1572}\right)^2}=0{,}01964$$ 1p

5.



a) Esitä 0-keskiarvoisen satunnaissignaalin x(t) keskimääräisen tehon lauseke tehospektrin $S_X(f)$ avulla.

b) Esitä lineaarisesti suodatetun satunnaissignaalin y(t) tehospektri x(t):n tehospektrin ja suodattimen siirtofunktion avulla.

c) Suodatin on ideaalinen kaistanpäästösuodatin, jonka kaistanleveys on W. Kuinka suuri on lähtösignaalin y(t) keskimääräinen teho, kun $S_X(f)=P_O/2W$.

RATKAISU:

a) $$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df$$ 3p

b) $$S_y(f) = \left|H(f)\right|^2 S_x(f)$$ 3p

a) Ideaalisella ap-suodattimella on.

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} \left|H(f)\right|^2 S_x(f)df = \int_{-W}^{W} \frac{P_o}{2W} df = P_o$$ 4p

6. CD-järjestelmässä (Compact Disc) AD-muunnetaan riippumattomasti kaksi ohjelmasignaalia, joiden kaistanleveys on 20 kHz käyttäen 44.1 kHz näytteenottotaajuutta ja 16 bitin lineaarista koodausta, jolloin kvantisointikohinan tehospektri on $S_{\varepsilon}(f) = \dfrac{x_{\max}^2}{f_s N^2}$, missä N on kvantisointitasojen lukumäärä.

a) Mikä on syntyvän PCM-signaalin bittinopeus?

b) Laske signaalikvantisointikohinasuhde (dB), kun oletetaan että rekonstruktiosuodatin on ideaalinen alipäästösuodatin (B = 20 kHz), ja ohjelmasignaalin tehollisarvo $\sigma_x = 0{,}173 x_{\max}$. (Tällä arvolla kukin signaali ylittää maksimiarvon 1s tunnissa, jos se on symmetrisesti eksponenttijakautunut.)

RATKAISU:

a) $R_b = 2 f_s n = 2 \cdot 44100 \cdot 16 = 1411200$ bit/s   2x→1p oikea vastaus 3p

b)

$$SQNR = 10\log\left(\frac{P_x}{P_{qn}}\right) = 10\log\left(\frac{(0{,}173 x_{\max})^2}{\dfrac{2W x_{\max}^2}{f_s\left(2^n\right)^2}}\right)$$

$$= 10\log\left(\frac{0{,}0299}{\dfrac{2\cdot 20000}{44100\cdot 2^{32}}}\right) = 81{,}5 \text{ dB}$$

signaalin teho OK → 2p
kvantisointikohinan teho OK → 2p
lopputulos OK → 2p

7. Suomessa käytetyssä DVB-järjestelmässä (Digital Video Broadcasting) käytetään kanavamultipleksin (yksi DVB-signaali) lähetyksessä monikantoaaltomodulaatiota, jossa 6817 kantoaaltojen taajuusväli on 1,116 kHz ja kukin kantoaalto on moduloitu 64QAM-signaalilla.

a) Kuinka suuri suojakaista jää eri DVB-signaalien väliin, kun kunkin kanavamultipleksin taajuusväli on 8 MHz?

b) Montako bittiä sisältää kukin symboli 64QAM:ssa?

c) Mikä on lähetetyn signaalin kokonaisbittinopeus?

RATKAISU:

a) DVB-signaalin kaistanleveys on $W \approx 6817 \cdot 1{,}116 = 7608$ kHz 3p.
Suojakaista = 8000 – 7608 =392 kHz 3p.

b) $2^6 = 64 \rightarrow 6$ bit/symboli 4p.

c) R = 6817·6·1,116 = 45647 kbit/s (ilman suoja-aikaväliä)

Todellisuudessa arvo on pienempi käytetyn suoja-aikavälin takia.

c-kohdan ratkaiseminen vaatii opintojaksosta puuttuvia tietoja, joten täysi pistemäärä tulee a- ja b-kohdasta.