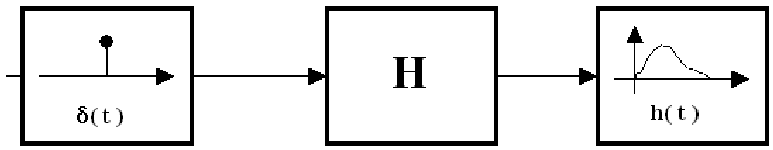
S-72.116 Signaalit ja järjestelmät – KONVOLUUTIO

©Martin Makundi 05.02.2000, email: <*martin@eml.hut.fi*>

1 Mikä ihmeen impulssivaste?

Konvoluution ymmärtämisen edellytyksenä on, että ymmärtää *impulssivasteen käsitteen.*

Impulssivaste $h(t)$ syntyy, kun järjestelmään H syötetään impulssi. Im-



Kuva 1: *Järjestelmän* **H** *impulssivaste* $\mathbf{h}(t)$ [syöte $\delta(t)$]

pulssifunktion määritelmään perustuen *ideaalisen impulssin* aikaintegraali (pinta-ala) on 1. Itse impulssifunktio sijaitsee aika-akselilla kohdassa, jossa impulssifunktion parametri saa arvon 0:

$$\delta(t-t_0) \Rightarrow t-t_0=0 \quad \rightarrow t=t_0, \quad jne...$$

Impulssifunktion Fourier-muunnos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-2j\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-2j\pi f\cdot 0}dt = e^0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

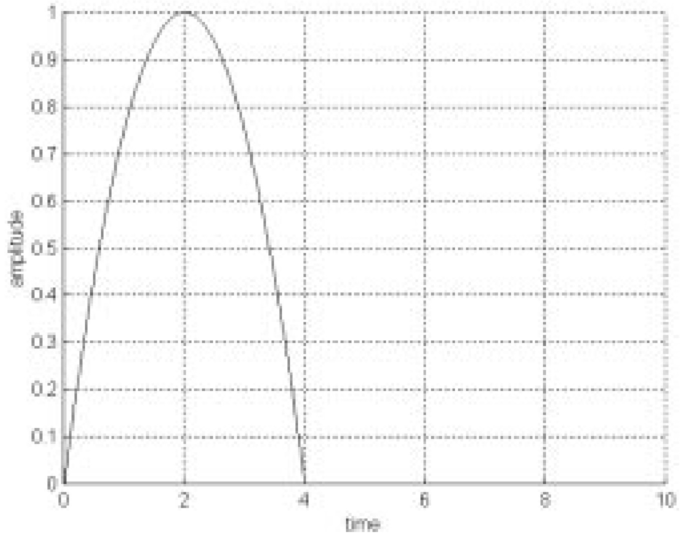
kertoo, että *impulssifunktion spektri on vakio* 1 *kaikilla taajuuksilla.* Tästä syystä impulssivastetta käytetään *järjestelmien analysoimiseen*: Kun järjestelmään syötetään impulssi, antaa järjestelmä ulostuloon vasteen, joka kertoo miten järjestelmä reagoi kaikkiin mahdollisiin eri taajuuksiin. Edelleen, järjestelmille voidaan myös mitata impulssivaste.

2 Mitä on konvoluutio?

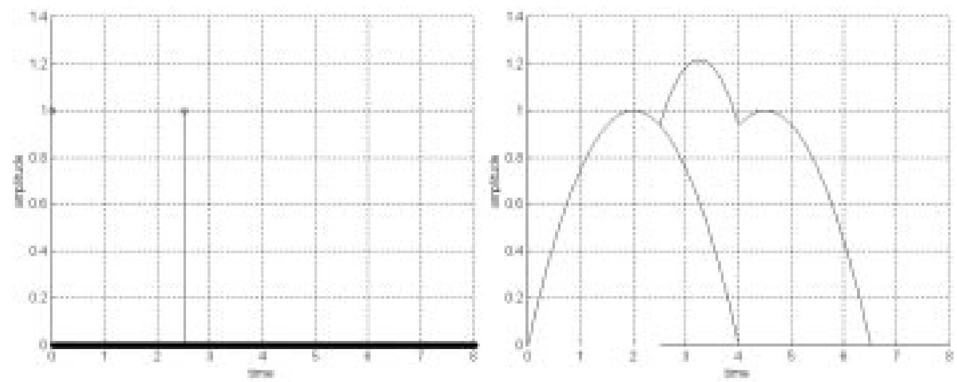
Konvoluution selittäminen kannattaa aloittaa *jatkuva-aikaisen* sijaan *hieman diskretoituna.* Diskretoituna siksi, että diskreettien selkeästi erillisten tapahtumien hahmottaminen on alkuun helpompaa, kuin jatkuva-aikaisten.

Määritellään ensin *oma järjestelmä* **H**, jonka *aika-alueen impulssivaste* ohessa (kuva 2). Tiedämme, että kun järjestelmään syötetään impulssi, saadaan ulostuloon juuri määritelty impulssivaste.

Entä mitä käy, kun syötämme hetken t_0 kuluttua järjestelmään toisen, *viivästetyn impulssin* $\delta(t-t_0)$? Järjestelmä antaa tietenkin vasteen myös tälle viivästyneelle impulssille, mainitun hetken t_0 kuluttua. Tästä seuraa, että aika-alueessa *kahden peräkkäisen impulssin vasteet superponoituvat*, kuten (kuva 3).



Kuva 2: *Oman järjestelmän* **H** *impulssivaste*



Kuva 3: *Oman järjestelmän* **H** *vaste kahdelle peräkkäiselle impulssille*

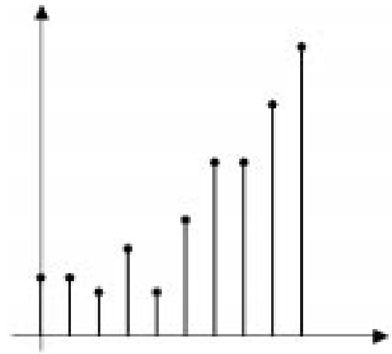
2.1 Konvoluutiosumma

Kun järjestelmään halutaan syöttää jokin pitempi diskreetti signaali, esimerkiksi (ohessa myös graafisesti, kuva 4).

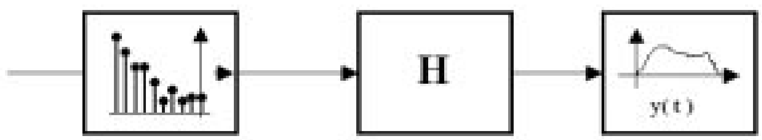
$$\begin{aligned} x(t) = \delta(t) + \delta(t-1) + \frac{3}{4}\delta(t-2) + \frac{3}{2}\delta(t-3) + \frac{3}{4}\delta(t-4) \\ + 2\delta(t-5) + 3\delta(t-6) + 3\delta(t-7) + 4\delta(t-8) + 5\delta(t-9) + \cdots \end{aligned}$$

Tavanomaisessa koordinaatistoesityksessä toki aika t kasvaa oikealle, positiivisen aika-akselin suuntaan. Mutta, jos teemme tilanteesta jälleen järjestelmämallin näemme, että sisääntulevan signaalin voidaan nähdä “lähestyvän vasemmalta” (kuva 5).

Kuitenkin ajan suhteen tarkasteltaessa, kun syöte ja vaste piirretään samalle aika-akselille, säilyy alkuperäinen järjestys. Kuva 6 näyttää syötteen



Kuva 4: *Järjestelmän esimerkkisyöte* $\mathbf{x}(t)$



Kuva 5: *Järjestelmän vaste* $\mathbf{y}(t)$ *esimerkkisyötteelle* $\mathbf{x}(t)$

$x(t)$ aikaansaaman vasteen $y(t)$ ajanhetkellä t. Nähdään selvästi, kuinka yksittäisten impulssien vasteet ovat superponoituneet vasteeksi $y(t)$.

Yleinen yhtälö syötteen $x(t)$ kytkeytymisestä järjestelmään $\mathbf{H}$ voidaan kuvata konvoluutiosumman

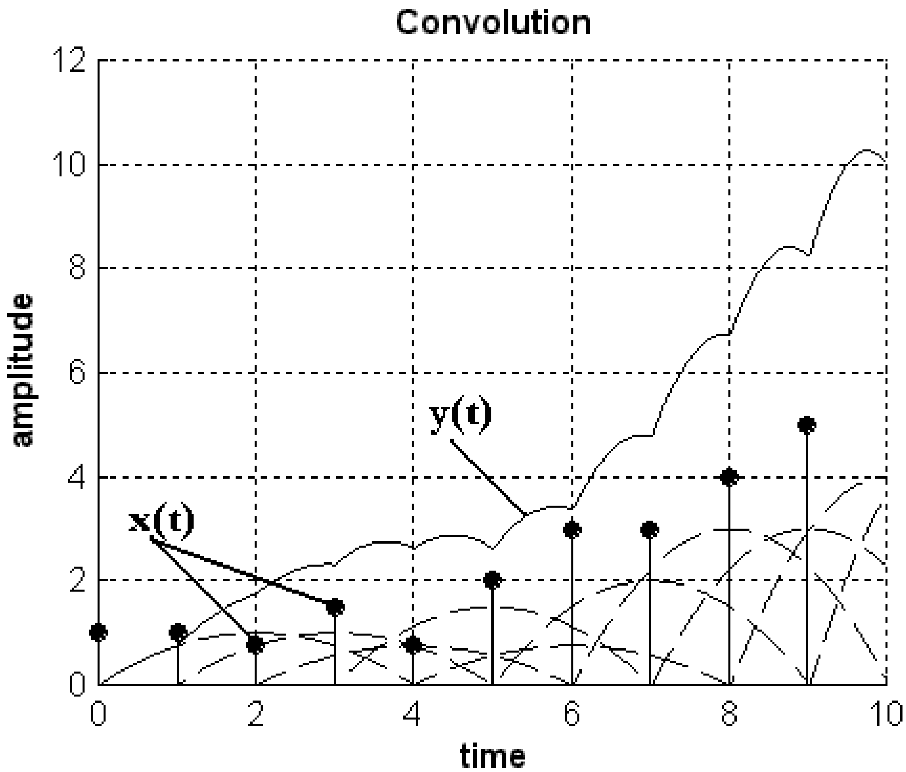
$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-k)h(k)$$

avulla. Tämä diskreettiaikainen konvoluutio pätee tilanteissa, joissa myös impulssivaste $h(t)$ on *olemassa vain diskreetteinä ajanhetkinä.* Huomataan, että myös *konvoluutiosumman matemaattinen esitys kääntää kytkeytyvän syötteen* $x(t)$ *"takaperin"*, ja laskee yhteen impulssivasteet yksitellen kulloiseenkin hetkeen t – aivan samalla tavalla, kuin mitä edellä on kuvattu (kuvat 3 ja 6).

Todellisuudessa konvoluutiosummassa on samantekevää kumpi käännetään, syötefunktio vai impulssivaste. Lisäksi kannattaa huomata, että tässä diskreetin konvoluution "johto" (**eihän tässä ole esitetty itseasiassa mitään diskreetissä aika-alueessa**) on hieman typistettynä, sillä se ei varsinaisesti kuulu kurssiin.

3 Jatkuva-aikainen konvoluutio

Jatkuva-aikainen konvoluutio on perusperiaatteiltaan aivan samanlainen, kuin sen diskreetti sisarkin, mutta reagoivien funktioiden luonteesta johtuen konvoluutio lasketaan integraalista.



Kuva 6: *Konvoluution tulos, vaste* $\mathbf{y}(t)$ *esimerkkisyötteelle* $\mathbf{x}(t)$*, ajassa* t

Konvoluutiointegraali aika- ja amplitudijatkuville funktioille:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)h(\lambda)d\lambda == \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda$$

Jatkuvan signaalin voidaan siis ajatella muodostuvan ikäänkuin äärettömän tiheästä impulssijonosta, jota on aika-alueessa painotettu signaalin muotoisella käyrällä.