
S-72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

Luennoitsija Prof. Riku Jäntti S-posti: riku.jantti@tkk.fi Puh. 09 451 2353 E219	Pääassistentti Seppo Saastamoinen S-posti: seppo.saastamoinen@tkk.fi Puh. 451 5417 E307B
---	--

S.72.1110

Mitä käsitellään?

- signaalien ja järjestelmien peruskäsitteitä
- signaali- ja järjestelmäanalyysin perusmenetelmiä
 - Signaalimuunnokset, signaalien taajuusesitys
 - Signaalien suodattaminen lineaarisilla alipäästö- ja kaistanpäästösuodattimilla
 - Näytteenotto
- signaalien modulointi

Missä tällaisia tietoja tarvitaan?

- elektroniikkajärjestelmissä
- tietoliikennejärjestelmissä
- signaalikäsittelyssä
- mittaustekniikassa
- säätötekniikassa
- kaukokartoituksessa
- radiomäärityksessä (paikannus)
- jne

Sisältö ja aikataulu

Alustava luentoaikataulu

to	01.11.	klo 8 – 10	S4	Johdanto, signaalit ja niiden funktioesitykset, signaaliavaruus
ti	06.11.	klo 14 – 16	S4	Fourier - sarja
to	08.11.	klo 8 - 10	S4	Fourier - muunnos ja sen ominaisuudet
ke	14.11.	klo 8 - 10	S1	Erikoissignaalien Fourier - muunnokset, näytteenotto
to	15.11.	klo 8 - 10	S4	Diskreetti Fourier - muunnos
ti	20.11.	klo 14 - 16	S4	Lineaariset järjestelmät
to	22.11.	klo 8 - 10	S4	Lineaaristen järjestelmien analyysi
ti	27.11.	klo 14 - 16	S4	Lineaarinen suodatus
to	29.11.	klo 8 - 10	S1	Epälineaariset järjestelmät, kvantisointi
ti	04.12.	klo 14 - 16	S4	Satunnaisignaalit
ke	05.12.	klo 8 - 10	S1	Satunnaisignaalit lineaarisissa järjestelmissä
ti	11.12.	klo 14 - 16	S4	Modulaatiot
to	13.12.	klo 14 - 16	S4	EI LUENTOJA, KTS. LASKUHARJOITUKSET!

S-72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikennelaboratorio

3

Sisältö ja aikataulu

Alustava harjoitusaikataulu

ke	07.11.	klo 8 - 10	S1	Laskuharjoitus 1
to	08.11.	klo 14 - 16	S1	Laskuharjoitus 1
ti	13.11.	klo 14 - 16	S4	Laskuharjoitus 2
to	15.11.	klo 14 - 16	S1	Laskuharjoitus 2
ke	21.11.	klo 8 - 10	S1	Laskuharjoitus 3
to	22.11.	klo 14 - 16	S1	Laskuharjoitus 3
ke	28.11.	klo 8 - 10	S1	Laskuharjoitus 4
to	29.11.	klo 14 - 16	S1	Laskuharjoitus 4
ke	12.12.	klo 8 - 10	S1	Laskuharjoitus 5
to	13.12.	klo 8 - 10	S4	Laskuharjoitus 6
to	13.12.	klo 14 - 16	S1	Extralaskuharjoitus, kurssin kertaus, kaksi esimerkkitehtä

S-72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikennelaboratorio

4

Kirjallisuus

- Vaadittu kirjallisuus
 - S-G Häggman: Signaalit ja järjestelmät, opintomonisteet
 - Luentokalvot
- Suositeltava kirjallisuus:
 - A.B.Carlson: Communications systems. An introduction to signals and noise in electrical communication. 4th ed. Mc Graw-Hill 2001, 768s. Luvut 2-9 (ei sisällä DFT:tä eikä FFT:tä)
 - S.Haykin: Communication systems. 4th ed. Wiley 2000, 800s.
 - L.Balmer: Signals and systems, an introduction, 2nd edition, Prentice Hall 1997, 550s. Luvut 1-6, 8-9 (ei sisällä modulaatioita)
 - E. C. Ifeachor: Digital Signal Processign – A practical approach, 1993, 760s. Luvut 2 ja 4. (vain DFT, FFT ja diskreetti konvoluutio)

Kalvojen värikoodit

Teoriaa

Kaavan johto

Esimerkki

Lisämateriaalia

Luento 1

- Signaalit
 - Jatkuva- ja diskreettiaikaiset sekä -amplitudiset signaalit
 - Jaksolliset ja jaksottomat signaalit
 - Teho- ja energiasignaalit
- Signaaliavaruus
 - Signaalien sisätulo
 - Signaalien normi, keskimääräinen teho ja energia
 - Kantafunktiot

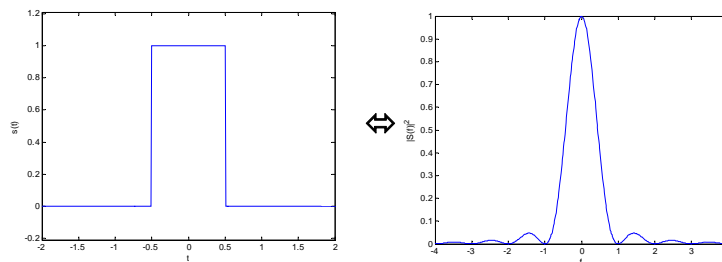
S-72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikennelaboratorio

7

Signaali

- Signaali on ajan, paikan tai minkä tahansa riippumattoman muuttujan mukana vaihteleva suure.
- Kurssilla keskitytään
 - Aikaisignaaleihin $s(t)$
 - Taajuussignaaleihin $S(f)$



S-72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikennelaboratorio

8

Signaalit

Signaali voi olla

- **Reaalinen**

$$s(t) \in \mathbb{R}$$

- **Kompleksinen**

$$s(t) = s_I(t) + i s_Q(t) \in \mathbb{C}$$

Esim. Moduloitu signaali

$$s(t) = v_I(t) \cos(2\pi f_c t) + v_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \quad \text{Moduloitu signaali}$$

$$s(t) = \operatorname{Re} \left\{ \left(v_I(t) + i v_Q(t) \right) e^{-i 2\pi f_c t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ s_I(t) e^{-i 2\pi f_c t} \right\}$$

$$s_I(t) = v_I(t) + i v_Q(t) \quad \text{Ekvivalentti alipäästösignaali}$$

Signaalit

- **Yksidimensioinen (yksikanavainen)**

$$s(t)$$

- **Monidimensioinen (monikanavainen)**

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

Esim. Ajoneuvon tila

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Paikka} \\ \text{Nopeus} \\ \text{Kiihtyvyys} \end{array}$$

Taajuusmultipleksoitu signaali

$$s(t) = v_1(t) \cos(2\pi f_1 t) + v_2(t) \cos(2\pi f_2 t)$$

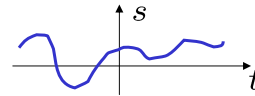
$$f_2 \gg f_1$$

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{Vektori esitys}$$

Signaalit

- **Jatkuva-aikainen**

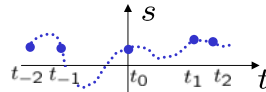
$$s(t), t \in \mathbb{R}$$



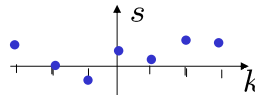
Signaali on määritelty kaikkina ajanhetkinä t

- **Diskreetti-aikainen**

$$s(t), t \in \{t_k, k \in \mathbb{Z}\}$$



$$s(k), k \in \mathbb{Z}$$



Signaali on määritelty vain tiettyinä ajanhetkinä t_k tai tietyille näytteille k

Signaalit

- **Jatkuva-amplitudinen**

Signaalin amplitudi $s(t)$ voi saada kaikkia amplitudi-arvoja ei-numeroituvasta joukosta A

$$s(t) \in A$$

$$A \subset \mathbb{C}$$

Esim. signaalin amplitudi voi saada minkä tahansa arvon reaalilukujen joukosta

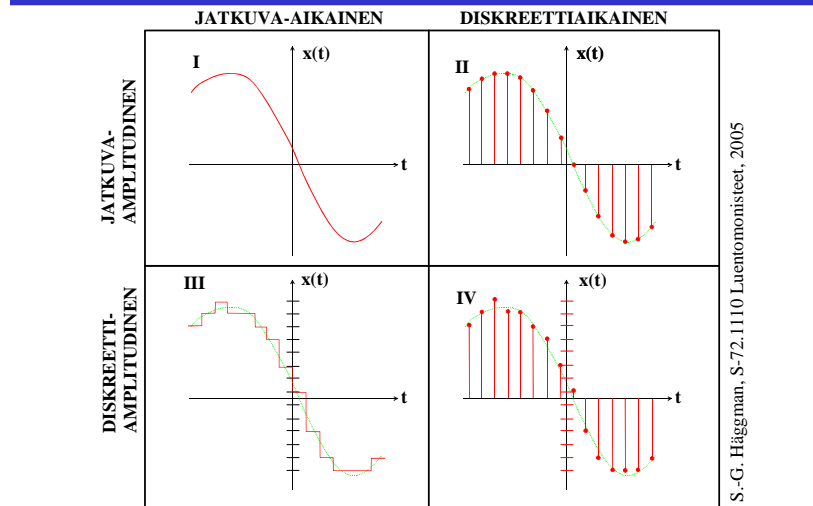
- **Diskreettiampitudinen**

Signaalin amplitudiarvot on rajoitettu numeroituvaan joukkoon B

$$s(t) \in \{s_0, s_1, s_2, \dots\}$$

Esim. 8 bitin kvantisoinnilla voidaan esittää $2^8 = 256$ signaalitasoa.

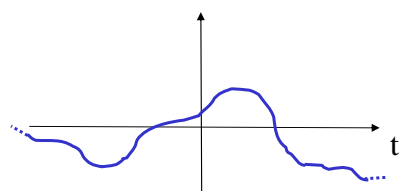
Signaalit



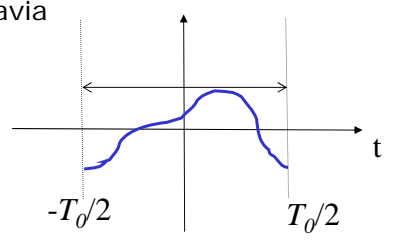
S.-G. Häggman, S-72.1110 Luentomonistheet, 2005

Signaalit

- **Aikarajoittamaton**
 $\exists T > 0 : s(t+T) \neq 0 \forall t$

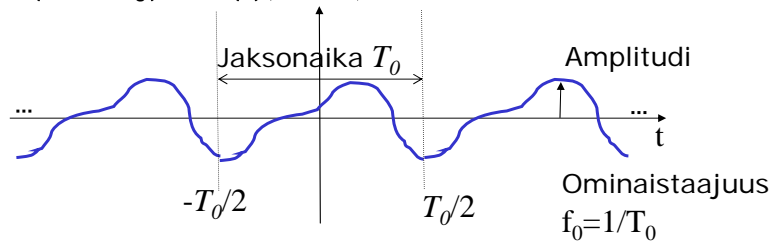


- **Aikarajoitettu, pulssisignaali:**
 Signaali saa nolasta poikkeavia arvoja ainoastaan tietyllä aikavälillä $t_2(t_0, t_1)$
 $s(t) = 0, t < t_0 \vee t > t_1$

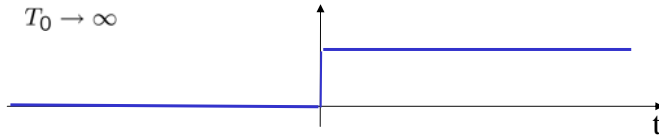


Signaalit

- Jaksollinen (periodinen)
 $v(t + kT_0) = v(t), t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$



- Jaksoton (aperiodinen)
 $T_0 \rightarrow \infty$



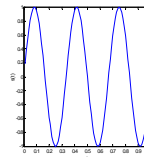
S-72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikennelaboratorio

15

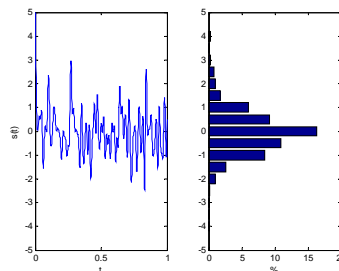
Signaalit

- Deterministinen**
 Signaalin amplitudiarvo $s(t)$ tunnetaan etukäteen kaikilla ajan t arvoilla



- Satunnainen (stokastinen)**
 Satunnaisen signaalin käyttäytymistä tulevaisuudessa ei voida tarkasti ennustaa. Voidaan vain esittää todennäköisyys sille, että amplitudi on jollakin amplitudivälillä

$$\Pr(s(t) \leq s) = F(s; t)$$



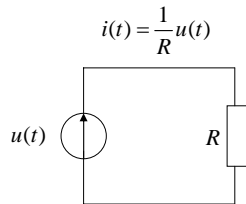
S-72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikennelaboratorio

16

Signaalin teho

- Jännitesignaalin hetkellisteho



Tehon kulutus vastuksessa

$$P(t) = u(t)i(t) = \frac{1}{R} u^2(t)$$

- Jos kuorma sisältää reaktiivisia komponentteja, niin vastaava yhtälö saadaan näennäisteholle $S(t) = |s(t)|^2$
- Mielivaltaiselle signaalille $s(t)$:
 $P(t) / |s(t)|^2$

Signaalin energia ja teho

- Signaalin energia

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \|s(t)\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |s(t)|^2 dt$$

- Signaali on **energiasignaali**, jos
 $0 < \|s(t)\|^2 < \infty$

- Keskimääräinen teho

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \langle |s(t)|^2 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt$$

- Signaali on **tehosignaali**, jos
 $0 < \langle |s(t)|^2 \rangle < \infty$

Normi

$$\|s(t)\|$$

Aikakeskiarvo

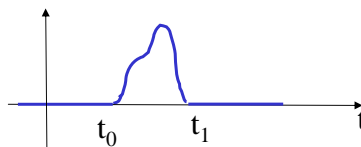
$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt$$

Signaalin energia ja teho

- Pulssisignaali

$$|s(t)| < \infty, \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

$$= 0 \quad \text{muutoin}$$



- Energia

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} |s(t)|^2 dt < \infty$$

Pulssisignaali on energiasignaali

- Keskimääräinen teho

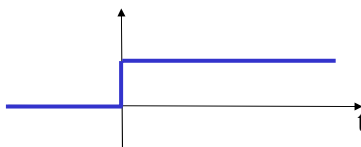
$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_1} |s(t)|^2 dt = 0$$

Pulssisignaali ei ole tehosignaali

Signaalin energia ja teho

- Askelsignaali

$$|s(t)| = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



- Energia

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{T}{2}} 1 dt = \infty$$

Askelsignaali ei ole energiasignaali

- Keskimääräinen teho

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^0 0 dt + \int_0^{\frac{T}{2}} 1 dt \right)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

Askelsignaali on tehosignaali

Signaalin energia ja teho

$$s_1(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

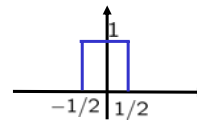
$$s_2(t) = \Pi(t)$$

$$s_3(t) = \exp(-\tau|t|)$$

- Signaali 1 on tehosignaali
- Signaalit 2 ja 3 ovat energiasignaaleita

Yksikköpulssi

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Jaksollisen signaalin teho

- Jaksollisen signaalin keskimääräinen teho

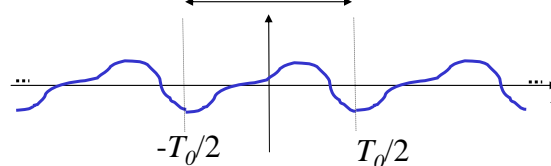
$$P = \langle |v(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |v(t)|^2 dt$$

missä $v(t)$ on signaali, jolle pätee

$$v(t) = v(t + kT_0), \quad k \in \mathbb{Z}$$

- **Jaksollinen signaali on tehosignaali**

Keskimääräisen tehon laskemiseksi
riittää, että tarkastellaan yhtä jaksoa



Sinimuotoinen signaali

- Sinimuotoinen signaali (esim. vaihtojännite)

$$v(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

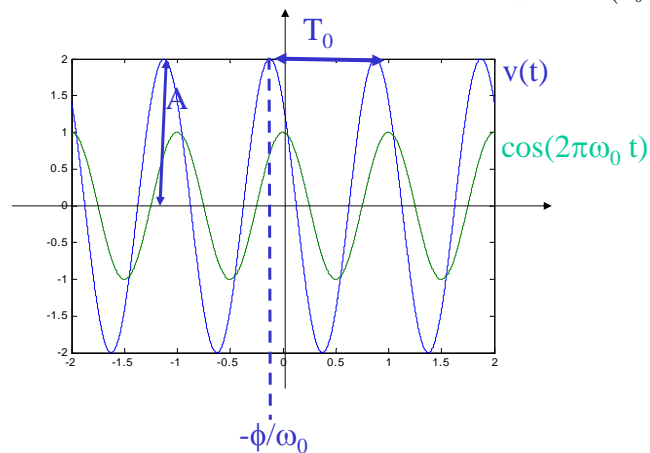
- A Amplitudi
- $\omega t + \phi$ Vaihekulma radiaaneina ($\pi \Leftrightarrow 180^\circ$)
- ϕ Vaihesiirtymä
 $\phi < 0$ jätto (lag), $\phi > 0$ johto (lead)
- ω_0 Ominaiskulmataajuus (rad/s)
- $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ Ominaistaajuus (Hz)
- $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0}$ Jaksonaika

$$A \cos(\omega_0 t) = 0, \quad \omega_0 t = (2n - 1)\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = 0, \quad \omega_0 t = (2n - 1)\pi - \phi, n \in \mathbb{Z}$$

Sinimuotoinen signaali

$$v(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$



Sinimuotoinen signaali

- Sinimuotoisen signaalin teho

Sinimuotoinen signaali

- Signaalin teho

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |v(t)|^2 dt = \frac{A^2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos^2 \left(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi \right) dt$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x)$$

$$\cos^2(x) = \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \right)^2 = \frac{1}{4}(e^{i2x} + 2 + e^{-2ix}) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$P = \frac{A^2}{2T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi}{T_0} t + 2\phi \right) \right) dt = \frac{A^2}{2T_0} \left[t + \frac{T_0}{4\pi} \sin \left(\frac{4\pi}{T_0} t + 2\phi \right) \right]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}$$

Sinimuotoinen signaali

- Signaalin teho

$$P = \frac{A^2}{2T_0} \left[\frac{T_0}{2} - \left(-\frac{T_0}{2}\right) + \frac{T_0}{4\pi} \underbrace{\left(\sin\left(\frac{4\pi T_0}{T_0} \frac{T_0}{2} + 2\phi\right) - \sin\left(-\frac{4\pi T_0}{T_0} \frac{T_0}{2} + 2\phi\right) \right)}_{=0} \right] = \frac{A^2}{2}$$

$$\cos(\phi \pm 2\pi) = \cos(\phi)$$

$$\sin(\phi \pm 2\pi) = \sin(\phi)$$

koska 2π on jakson pituus

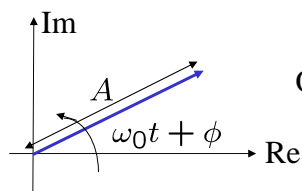
Osoitinesitys

- Eulerin teoreema

$$\exp(i\phi) = \cos(\phi) + i \sin(\phi), \quad i = \sqrt{-1}$$

- Osoitin

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \operatorname{Re} \{ A \exp(i\phi) \exp(i\omega_0 t) \}$$



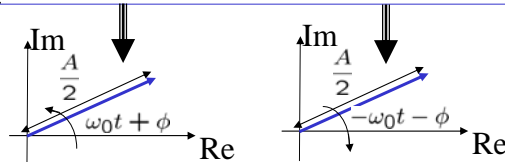
Osoitin pyörii taajuudella $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$

$$\exp(x) = e^x, \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \approx 2.7183$$

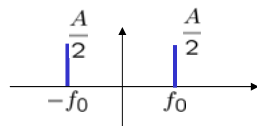
Viivaspektri

- Sinimuotoinen signaali voidaan esittää kahden osoittimen summana

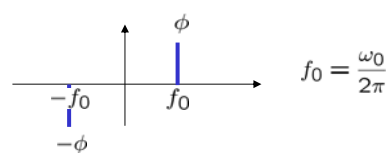
$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} (\exp(i(\omega_0 t + \phi)) + \exp(-i(\omega_0 t + \phi)))$$



Amplitudispektri



Vaihespektri



S-72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikennelaboratorio

29

Sisätulo

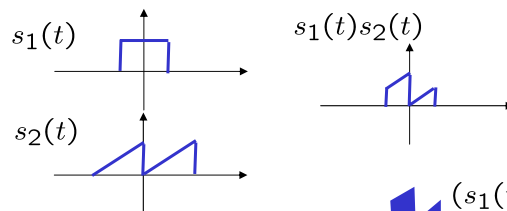
- Kahden energiasignaalin välinen sisätulo

$$(s_1(t)|s_2(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T s_1(t) s_2^*(t) dt$$

- Kompleksikonjugaatti

$$s(t) = s_I(t) + i s_Q(t), \quad i = \sqrt{-1}$$

$$s^*(t) = s_I(t) - i s_Q(t), \quad i = \sqrt{-1}$$



$$(s_1(t)|s_2(t)) = \text{signaalien tulon alue}$$

S-72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikennelaboratorio

30

Sisätulo

- Sisätulon ominaisuuksia

$$\begin{aligned} (s_1(t) | s_2(t)) &= (s_2(t) | s_1(t))^* \\ (as_1(t) | s_2(t)) &= a(s_1(t) | s_2(t)) \\ (s_1(t) | as_2(t)) &= a^*(s_1(t) | s_2(t)) \\ (s_1(t) + s_2(t) | s_3(t)) &= (s_1(t) | s_3(t)) + (s_2(t) | s_3(t)) \end{aligned}$$

Sisätulo

- Signaalin energia** (indusuoitu normi)

$$E \stackrel{def}{=} \|s(t)\|^2 \stackrel{def}{=} (s(t) | s(t))$$

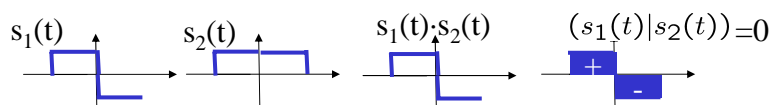
- Ortogonalisuus ja ortonormaalisuus**

$$(s_1(t) | s_2(t)) = 0 \quad \text{Ortogonalisuus}$$

$$(s_1(t) | s_1(t)) = 1 \quad \text{Ortonormaalisuus}$$

$$E_{s_1} = (s_1(t) | s_1(t)) = 1$$

$$E_{s_2} = (s_2(t) | s_2(t)) = 1$$



Sisätulo

- Kahden jaksollisen signaalin sisätulo, kun molempien signaalien jaksonaika on T_0 (tai T_0 on niiden jaksonaikojen monikerta)

$$(v_1(t)|v_2(t)) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v_1(t)v_2^*(t) dt$$

- Keskimääräinen teho (indusoitu normi)

$$P \stackrel{def}{=} \langle v(t) | v(t) \rangle \stackrel{def}{=} (v(t)|v(t))$$

- Ortogonalisuus ja ortonormaalisuus

$$(v_1(t)|v_2(t)) = 0 \quad \text{Ortogonalisuus}$$

$$(v_1(t)|v_2(t)) = 0 \quad \text{Ortonormaalisuus}$$

$$P_{v_1} = \langle v_1(t) | v_1(t) \rangle = (v_1(t)|v_1(t)) = 1$$

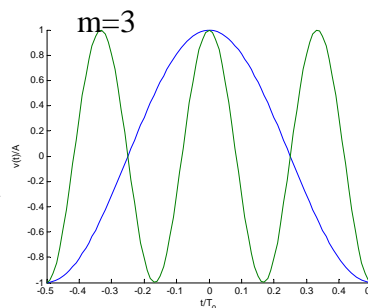
$$P_{v_2} = \langle v_2(t) | v_2(t) \rangle = (v_2(t)|v_2(t)) = 1$$

Sisätulo

- Tarkastellaan kahta signaalia

$$v_1(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$$v_2(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\frac{1}{m} T_0} t\right) \quad m \in \mathbb{N}^+$$



$$(v_1(t)|v_2(t)) = 0$$

Jos sinimuotoisten signaalien taajuudet f_0 ovat monikertoja, niin signaalien sisätulo on 0. Signaalit ovat keskenään ortogonaalisia.

Ortonormaaliset signaalit tiedonsiirrossa

- Määritellään kaksi ortonormaalia signaalia
 $P_{v_1} = (v_1(t) | v_1(t)) = 1$ Esim
 $P_{v_2} = (v_2(t) | v_2(t)) = 1$ $v_1(t) = \cos(\omega_0 t)$
 $(v_1(t) | v_2(t)) = 0$ $v_2(t) = \sin(\omega_0 t)$
- Olkoon I_1 ja I_2 kaksi informaatio-symbolia (esim. +1 tai -1)
- Muodostetaan lähetettävä signaali $s(t)$
 $s(t) = I_1 v_1(t) + I_2 v_2(t)$
- Kohinattomassa tapauksessa vastaanottimessa informaatio-symbolit saadaan ratkaistua läheteestä $s(t)$ käyttäen sisätuloa
 $(s(t) | v_1(t)) = I_1$
 $(s(t) | v_2(t)) = I_2$

S-72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikennelaboratorio

35

Signaaliavaruus

- Signaaliavaruus on normillinen avaruus, jonka normi on sisätulon indusoima

$$\|s(t)\|^2 = (s(t) | s(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |s(t)|^2 dt \quad \text{Energiasignaali}$$

$$\langle |s(t)|^2 \rangle = (s(t) | s(t)) = \frac{1}{T_0} \int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |s(t)|^2 dt \quad \text{Tehosignaali}$$

- Signaaliavaruus muistuttaa vektoriavaruutta, mutta vektorien sijaan avaruuden elementit ovat signaaleita (funktioita)

S-72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikennelaboratorio

36

Signaaliavaruus

- Määritellään K **lineaarisesti riippumatonta** kantafunktiota $\phi_k(t)$

$$\phi_k(t), k = 1, 2, \dots, K$$

$$\sum_k w_k \phi_k(t) = 0 \quad \text{jos ja vain jos } w_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

- Kantafunktiot **virittävät** K -dimensioisen signaaliavaruuden, jonka elementit voidaan esittää kantafunktioiden lineaarikombinaationa

$$x(t) = \sum_{k=1}^K c_k \phi_k(t)$$

Signaaliavaruus

- Kanta on **ortogonaalinen**, jos

$$\begin{aligned} (\phi_k(t) | \phi_l(t)) &> 0, & k = l \\ &= 0, & k \neq l \end{aligned}$$

ja **ortonormaallinen**, jos

$$(\phi_k(t) | \phi_l(t)) = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Signaaliavaruus

- Signaalin $s(t)$ approksimointi *ortonormalin* kannan $\{\phi_k(t)\}$ avulla

Signaaliavaruus

- Approksimoidaan signaalia $s(t)$ *ortonormalin* kannan $\{\phi_k(t)\}$ avulla

$$s(t) \approx \sum_k c_k \phi_k(t) \triangleq \hat{s}(t)$$

- Valitaan painokertoimet $\{c_k\}$ siten, että erosignaalin $\tilde{s}(t) = s(t) - \hat{s}(t)$

normin neliö (energia / teho signaalityypistä riippuen) minimoituu

$$\min_{\{c_k\}} \|\tilde{s}(t)\|^2$$

- Normi voidaan lausua sisätulon avulla

$$\|\tilde{s}(t)\|^2 = \left\| s(t) - \sum_k c_k \phi_k(t) \right\|^2 = \left(s(t) - \sum_k c_k \phi_k(t) \middle| s(t) - \sum_k c_k \phi_k(t) \right)$$

$$= \|s(t)\|^2 - \left(s(t) \middle| \sum_k c_k \phi_k(t) \right) - \left(\sum_k c_k \phi_k(t) \middle| s(t) \right) + \left\| \sum_k c_k \phi_k(t) \right\|^2$$

Signaaliavaruus

- Tarkastellaan normia

$$\|\hat{s}(t)\|^2 = \left\| \sum_k c_k \phi_k(t) \right\|^2 = \sum_k \sum_l c_k c_l^* (\phi_k(t) | \phi_l(t))$$

- Kanta on ortonormaali, joten

$$(\phi_k(t) | \phi_l(t)) = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

ja

$$\|\hat{s}(t)\|^2 = \left\| \sum_k c_k \phi_k(t) \right\|^2 = \sum_k |c_k|^2$$

Signaaliavaruus

- Tarkastellaan summaa

$$\left(s(t) \left| \sum_k c_k \phi_k(t) \right. \right) - \left(\sum_k c_k \phi_k(t) \left| s(t) \right. \right)$$

$$= \sum_k c_k^* (s(t) | \phi_k(t)) - \sum_k c_k (\phi_k(t) | s(t))$$

$$= \sum_k c_k^* (s(t) | \phi_k(t)) - \sum_k c_k (s(t) | \phi_k(t))^*$$

$$\begin{aligned} (s_1(t) | s_2(t)) &= (s_2(t) | s_1(t))^* \\ (as_1(t) | s_2(t)) &= a (s_1(t) | s_2(t)) \\ (s_1(t) | as_2(t)) &= a^* (s_1(t) | s_2(t)) \\ (s_1(t) + s_2(t) | s_3(t)) &= (s_1(t) | s_3(t)) + (s_2(t) | s_3(t)) \end{aligned}$$

Signaaliavaruus

- Erosuureen normi voidaan nyt kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}\|\tilde{s}(t)\|^2 &= \left\| s(t) - \sum_k c_k \phi_k(t) \right\|^2 = \\ &= \|s(t)\|^2 - \sum_k c_k^* (s(t)|\phi_k(t)) - \sum_k c_k (s(t)|\phi_k(t))^* + \sum_k c_k^* c_k\end{aligned}$$

- Kertoimet ovat kompleksilukuja $c_k = c_{re,k} + ic_{im,k}$, joten minimi voidaan ratkaista reaali- ja kompleksiosan suhteen derivaatan nollakohtista

$$\frac{d}{dc_{re,k}} \|\tilde{s}(t)\|^2 = 0$$

$$\frac{d}{dc_{im,k}} \|\tilde{s}(t)\|^2 = 0$$

Signaaliavaruus

- Derivaatan nollakohta:

$$\|\tilde{s}(t)\|^2 = \|s(t)\|^2 - \sum_k (c_{re,k} - ic_{im,k})(s(t)|\phi_k(t)) - \sum_k (c_{re,k} + ic_{im,k})(s(t)|\phi_k(t))^* + \sum_k (c_{re,k}^2 + c_{im,k}^2)$$

$$\frac{d}{dc_{re,k}} \|\tilde{s}(t)\|^2 = -(s(t)|\phi_k(t)) - (s(t)|\phi_k(t))^* + 2c_{re,k} = 0$$

$$\frac{d}{dc_{im,k}} \|\tilde{s}(t)\|^2 = i(s(t)|\phi_k(t)) - i(s(t)|\phi_k(t))^* + 2c_{im,k} = 0$$

$$c_{re,k} = \frac{1}{2} \left[(s(t)|\phi_k(t)) + (s(t)|\phi_k(t))^* \right]$$

$$c_{im,k} = \frac{-i}{2} \left[(s(t)|\phi_k(t)) - (s(t)|\phi_k(t))^* \right]$$

$$c_k = c_{re,k} + ic_{im,k} = (s(t)|\phi_k(t))$$

$$c_k = (s(t)|\phi_k(t))$$

$$\begin{aligned}z &= z_{re} + iz_{im} \\ z^* &= z_{re} - iz_{im} \\ z_{re} &= \frac{1}{2}(z + z^*) \\ z_{im} &= -\frac{i}{2}(z - z^*)\end{aligned}$$

- Kyseessä on aito minimi, koska

$$\frac{d}{dc_{re,k}} \|\tilde{s}(t)\|^2 = 2 > 0, \quad \frac{d}{dc_{im,k}} \|\tilde{s}(t)\|^2 = 2 > 0$$

Signaaliavaruus

- Kun $c_k = (s(t)|\phi_k(t))$, virheen normiksi tulee

$$\begin{aligned}\|\tilde{s}(t)\|^2 &= \left\| s(t) - \sum_{k=1}^K c_k \phi_k(t) \right\|^2 \\ &= \|s(t)\|^2 - \sum_{k=1}^K c_k (s(t)|\phi_k(t))^* - \sum_{k=1}^K c_k^* (s(t)|\phi_k(t)) + \sum_k |c_k|^2\end{aligned}$$

$$\|\tilde{s}(t)\|^2 = \|s(t)\|^2 - \sum_k |c_k|^2$$

- Tästä voidaan johtaa **Besselin epäyhtälö**

$$\|\tilde{s}(t)\|^2 = \|s(t)\|^2 - \sum_k |c_k|^2 \Rightarrow \|s(t)\|^2 = \sum_k |c_k|^2 + \|\tilde{s}(t)\|^2$$

$$\|s(t)\|^2 \geq \sum_k |c_k|^2$$

Signaaliavaruus

- Energiasignaalit

$$\begin{aligned}E_s &= \|s(t)\|^2 \\ E_{\hat{s}} &= \|\hat{s}(t)\|^2 = \sum_k |c_k|^2 \\ E_{\tilde{s}} &= E_s - \sum_k |c_k|^2\end{aligned}$$

- Jos $E_{\tilde{s}} = 0$

Parsevalin teoreema

$$E_s = \sum_k |c_k|^2$$

- Tehosignaalit

$$\begin{aligned}P_s &= \langle |s(t)|^2 \rangle \\ P_{\hat{s}} &= \langle |\hat{s}(t)|^2 \rangle = \sum_k |c_k|^2 \\ P_{\tilde{s}} &= P_s - \sum_k |c_k|^2\end{aligned}$$

- Jos $P_{\tilde{s}} = 0$

Parsevalin teoreema

$$P_s = \sum_k |c_k|^2$$

Fourierin eksponettisarja

- Jaksollinen signaali $s(t)$

$$s(t) = s(t + T_0)$$

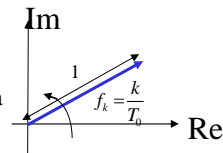
- Ortonormaali kanta

$$\phi_k(t) = \exp\left(i \frac{2\pi k}{T_0} t\right) \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$c_k = (s(t) | \phi_k(t)) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \phi_k^*(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \exp\left(-\frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt$$

Tähän palataan seuraavalla luennolla

Kannan muodostaa erisuuntia ja eri taajuuksilla pyörivät osoittimet



Walsh-funktiot

- Pulssisignaali aikavälillä $(0, T)$
- K -dimensioinen ortogonaali kanta

$$\phi_k(t) = W_k(t)$$

$$W_0(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$

$$W_{2n+p}(t) = W_n\left(2\left(t + \frac{1}{4}\right)\right) + (-1)^p W_n\left(2\left(t - \frac{1}{4}\right)\right)$$

Sovelluksia:

- kanavointikoodaus CDMA-järjestelmässä
- kuvion tunnistus ja kuvankäsittely
- ...

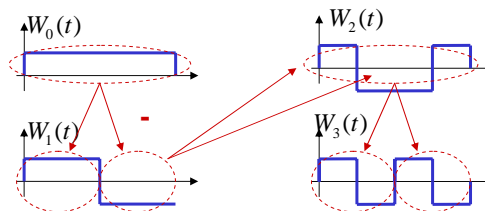
- Esim. $K=4$

$$k=1: n=0, p=1$$

$$k=2: n=1, p=0$$

$$k=3: n=2, p=1$$

$$k=4: n=2, p=2$$



Muita ortonormaaleita kantafunktioita

- Laguerren funktiot $L_k(t)$,
 $t \in [0, 1]$, $k=0, 1, 2, \dots$

$$\phi_k(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t\right)L_k(t)$$

$$L_k(t) = \frac{\exp(-t)}{k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^k \exp(-t))$$

$$(k+1)L_{k+1}(t) = (2k+1-t)L_k(t) - kL_{k-1}(t)$$

Kvanttimekaniikka: Schrödingerin yhtälön ratkaisut

- Hermiteen funktiot $H_k(t)$,
 $t \in (-1, 1)$, $k=0, 1, 2, \dots$

$$\phi_k(t) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)}{\sqrt{2^n k! \sqrt{\pi}}} H_k(t)$$

$$H_k(t) = (-1)^k \exp(-t^2) \frac{d^k}{dt^k} (\exp(-t^2))$$

$$H_{k+1}(t) = 2tH_k(t) - 2kH_{k-1}(t)$$

Fysiikka, tilastotiede

- Legendren funktiot $P_k(t)$,
 $t \in [-1, 1]$, $k=0, 1, 2, \dots$

$$\phi_k(t) = \sqrt{k + \frac{1}{2}} P_k(t)$$

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} (t^2 - 1)^k$$

$$(k+1)P_{k+1}(t) = (2k+1)tP_k(t) - kP_{k-1}(t)$$

Potentiaalteoria (sähkömagnetismi, virtausdynamikka, tähtitiede,...):
Laplacen yhtälö rarkaisut

- Tsebysevin (Chebyshevin) funktiot $C_k(t)$, $t \in [-1, 1]$, $k=0, 1, 2, \dots$

$$\phi_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1-t^2)^{\frac{1}{4}} C_0(t) & k=0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1-t^2)^{\frac{1}{4}} C_k(t) & k=1, 2, \dots \end{cases}$$

$$C_k(t) = 2tC_{k-1}(t) - C_{k-2}(t), k \geq 1$$

$$C_0(t) = 1, C_1(t) = t$$

Approksimaatioteoria (interpolointi)

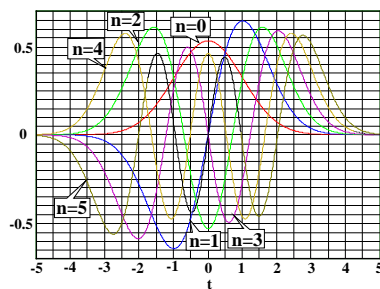
S-72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikennelaboratorio

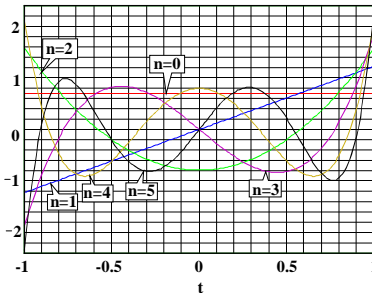
49

S.-G. Häggman, S-72.1110 Luentomonisteet, 2005

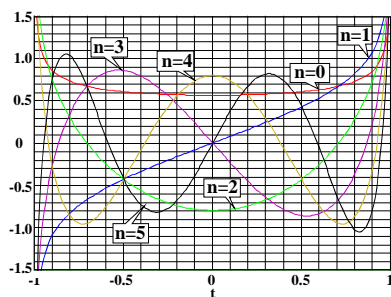
Hermiteen polynomeihin perustuvat kantafunktiot



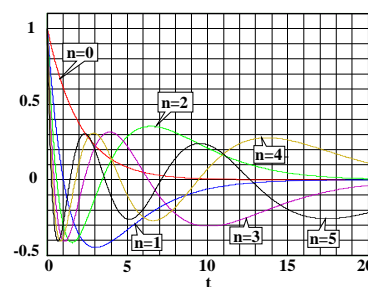
Legendren polynomeihin perustuvat kantafunktiot



Tsebyshevin polynomeihin perustuvat kantafunktiot



Laguerren polynomeihin perustuvat kantafunktiot



Gram-Schmidt proseduuri

- Muodostetaan ortogonaali kanta K :sta lineaarisesti riippumattomasta signaalista $\{g_k(t)\}$

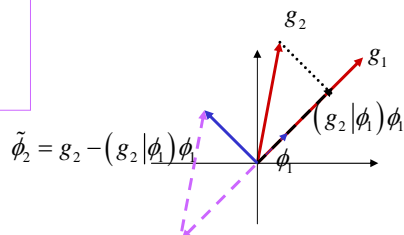
$$\phi_1(t) = \frac{g_1(t)}{\|g_1(t)\|}$$

$$c_{kl} = (g_k(t) | \phi_l(t)), \quad l = 1, 2, \dots, k-1$$

$$\tilde{\phi}_k(t) = g_k(t) - \sum_{l=1}^{k-1} c_{kl} \phi_l(t), \quad k = 2, 3, \dots, K$$

$$\phi_k(t) = \frac{\tilde{\phi}_k(t)}{\|\tilde{\phi}_k(t)\|}$$

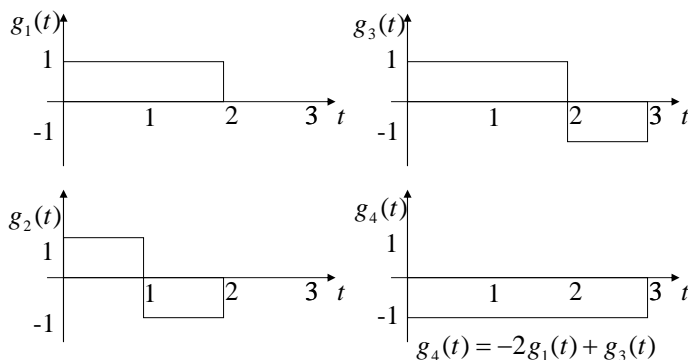
Se osa signaalista $g_k(t)$, joka voidaan selittää lineaarikombinaationa kantafunktioista $\phi_l(t)$, $l=1, 2, \dots, k-1$



Normalisoidaan muodostetun signaalin energia / teho

Gram-Schmidt proseduuri

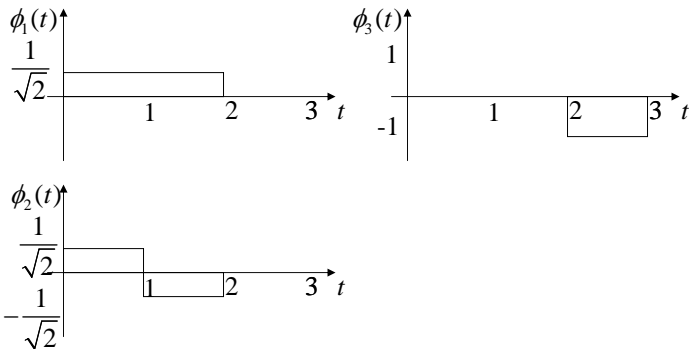
- Tarkastellaan signaaleita $\{g_k(t)\}$



$$E_k = \|g_k(t)\|^2 = \int_0^T |g_k(t)|^2 dt \Rightarrow E_1 = E_2 = 2, \quad E_3 = E_4 = 3$$

Gram-Schmidt proseduuri

- Ortonormaalit kantafunktiot (signaalit)



- Signaalijoukko $\{g_k(t)\}$ sisälsi vain kolme lineaarisesti riippumatonta signaalia, joten kantafunktioitakin on vain kolme

S-72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

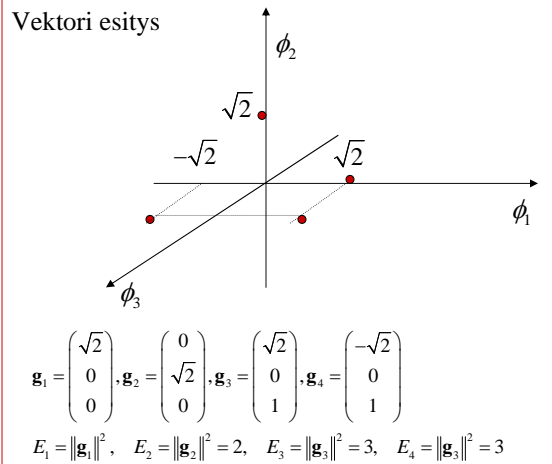
TKK Tietoliikennelaboratorio

53

Gram-Schmidt proseduuri

- Signaalien esittäminen kannan avulla

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \sqrt{2}\phi_1(t) \\ g_2(t) &= \sqrt{2}\phi_2(t) \\ g_3(t) &= \sqrt{2}\phi_1(t) + \phi_3(t) \\ g_4(t) &= -\sqrt{2}\phi_1(t) + \phi_3(t) \end{aligned}$$



S-72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikennelaboratorio

54