

Luento 10

- Todennäköisyyslaskentaa
 - Otosavaruus, tapahtuma ja todennäköisyys
 - Ehdollinen todennäköisyys, tilastollinen riippumattomuus, Bayesin teoreema, kokonaistodennäköisyys
 - Odotusarvo, varianssi, momentti
- Stokastiset prosessit
 - Stationäärisuus ja ergodisuus

4.12.2007

1

Otosavaruus, tapahtuma

- Otosavaruus (sample space) Ω on kaikkien mahdollisten alkeistapahtumien (sample) ω joukko.
 - Esim. 1. Nopanheitto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 - Esim. 2. Lähetyspuskurissa olevien pakettien lukumäärä $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{Z}$
 - Esim. 3. Puhelinkesto aika $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- Tapahtumat A, B, C, \dots (events) ovat otosavaruuden mitallisia osajoukkoja $A, B, C, \dots \subset \Omega$
 - Mahdoton tapahtuma esitetään tyhjällä joukolla \emptyset
 - Varma tapahtuma esitetään koko otosavaruudella Ω
 - Esim. 1. Nopan silmäluku on seitsemän $A = \emptyset$
 - Esim. 2. Puskurissa ei ole paketteja $A = \{0\}$
 - Esim. 3. Puhelu kestää korkeintaan 120 s
 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 120\}$

4.12.2007

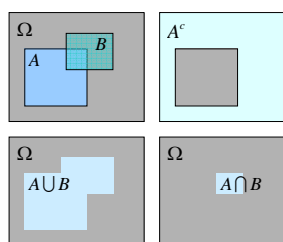
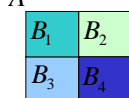
2

Otosavaruus, tapahtuma

- Yhdiste (union) $A \cup B$
- Leikkaus (intersection) $A \cap B$
- Komplementti (complement) $A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$
- Tapahtumat ovat toisensa poissulkevia (disjoint), jos $A \cap B = \emptyset$
- Kokoelma $\{B_j\}$ tapahtumia muodostaa tapahtuman osituksen (partition), jos

$$B_i \cap B_j = \emptyset$$

$$\bigcup_j B_j = A$$



4.12.2007

3

Todennäköisyys

- Tapahtuman todennäköisyys on sitä vastaavan joukon mitta $\Pr: \mathfrak{A} \mapsto [0,1]$, missä \mathfrak{A} on kaikkien tapahtumien yhdiste.
 - $\Pr\{\Omega\} = 1$
 - $\Pr\{\emptyset\} = 0$
 - $\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{A \cap B\}$
 - $\Pr\{A^c\} = \Pr\{\Omega \setminus A\} = \Pr\{\Omega\} - \Pr\{A\} = 1 - \Pr\{A\}$
 - $\Pr\{A\} = \sum_j \Pr\{B_j\}$, $A = \bigcup_j B_j$, $B_i \cap B_j = \emptyset$
- Ehdollinen todennäköisyys

$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{A \cap B\}}{\Pr\{B\}} \Leftrightarrow \Pr\{A|B\} \Pr\{B\} = \Pr\{B|A\} \Pr\{A\}$$

4.12.2007

4

Todennäköisyys

Kokonaistodennäköisyys

- Olkoon $\{B_i\}$ otosavaruuden Ω ositus
- Tällöin $\{B_i \cap A\}$ on tapahtuman A ositus: $A = \bigcup_j A \cap B_j$ ja

$$\Pr\{A\} = \sum_j \Pr\{A \cap B_j\}$$

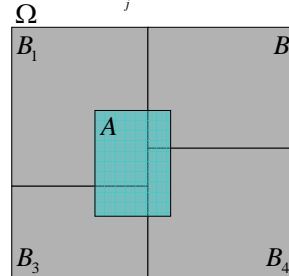
- Ehdollisen todennäköisyyden lausekkeesta saadaan

$$\Pr\{A|B_j\} = \frac{\Pr\{A \cap B_j\}}{\Pr\{B_j\}}$$

$$\Leftrightarrow \Pr\{A \cap B_j\} = \Pr\{A|B_j\} \Pr\{B_j\}$$

- Kokonaistodennäköisyys voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$\Pr\{A\} = \sum_j \Pr\{A|B_j\} \Pr\{B_j\}$$



4.12.2007

5

Bayesin kaava

- Olkoon $\{B_i\}$ otosavaruuden Ω ositus; tällöin

$$\left. \begin{aligned} \Pr\{A|B_i\} &= \frac{\Pr\{A \cap B_i\}}{\Pr\{B_i\}} \\ \Pr\{B_i|A\} &= \frac{\Pr\{A \cap B_i\}}{\Pr\{A\}} \\ \Pr\{A\} &= \sum_j \Pr\{A|B_j\} \Pr\{B_j\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Pr\{B_i|A\} = \frac{\Pr\{A|B_i\} \Pr\{B_i\}}{\sum_j \Pr\{A|B_j\} \Pr\{B_j\}}$$

- *a priori* todennäköisyys $\Pr\{A|B_i\}$
- *a posteriori* todennäköisyys $\Pr\{B_i|A\}$

4.12.2007

6

Tilastollinen riippumattomuus

- **Määritelmä:** A ja B ovat riippumattomia (independent), jos $\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A\} \Pr\{B\}$
- Olkoon A ja B riippumattomia tapahtumia, tällöin

$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{A \cap B\}}{\Pr\{B\}} = \frac{\Pr\{A\} \Pr\{B\}}{\Pr\{B\}} = \Pr\{A\}$$

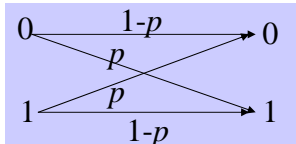
$$\Pr\{B|A\} = \frac{\Pr\{A \cap B\}}{\Pr\{A\}} = \frac{\Pr\{A\} \Pr\{B\}}{\Pr\{A\}} = \Pr\{B\}$$

4.12.2007

7

Esimerkki. Binäärinen siirtokanava

- Valitaan lähetettävä bitti satunnaisesti
 $\Pr\{\text{lähetettävä bitti on } 1\} = 1 - \Pr\{\text{lähetettävä bitti on } 0\} = q$
- Bittivirhetodennäköisyys $\Pr\{\text{bittivirhe}\} = p$



- Oikein ja virheellisesti lähetettyjen bittien todennäköisyydet
 $\Pr\{\text{vastaanotetaan } 1 | \text{lähetetty } 0\} = \Pr\{\text{bittivirhe}\} = p$
 $\Pr\{\text{vastaanotetaan } 1 | \text{lähetetty } 1\} = 1 - \Pr\{\text{bittivirhe}\} = 1 - p$
- Kuinka hyvin voimme luottaa vastaanottimeen?
 $\Pr\{\text{lähetetty } 1 | \text{vastaanotettu } 1\} = ?$

4.12.2007

8

Esimerkki. Binäärinen siirtokanava

- Sovelletaan Bayesin kaavaa

$$\begin{aligned}\Pr\{\text{lähetetty 1}|\text{vastaanotettu 1}\} &= \frac{\Pr\{\text{vastaanotettu 1}|\text{lähetetty 1}\}\Pr\{\text{lähetetty 1}\}}{\Pr\{\text{vastaanotettu 1}|\text{lähetetty 1}\}\Pr\{\text{lähetetty 1}\} + \Pr\{\text{vastaanotettu 1}|\text{lähetetty 0}\}\Pr\{\text{lähetetty 0}\}} \\ &= \frac{(1-p)q}{(1-p)q + p(1-q)}\end{aligned}$$

- Jos molemmat bitit yhtätodennäköisiä

$$\Pr\{\text{lähetettävä bitti on 1}\} = 1 - \Pr\{\text{lähetettävä bitti on 0}\} = q = 0.5$$

$$\Pr\{\text{lähetetty 1}|\text{vastaanotettu 1}\} = \Pr\{\text{vastaanotettu 1}|\text{lähetetty 1}\} = 1 - p$$

- Jos bitti 0 on kaksi kertaa niin todennäköinen kuin 1

$$\Pr\{\text{lähetettävä bitti on 1}\} = q = 1/3$$

$$\Pr\{\text{lähetetty 1}|\text{vastaanotettu 1}\} = \frac{1-p}{1+p}$$

4.12.2007

9

Satunnaismuuttujat

- **Diskreetti satunnaismuuttuja** X voi saada vain arvoja jotka kuuluvat numeroituvaan joukkoon

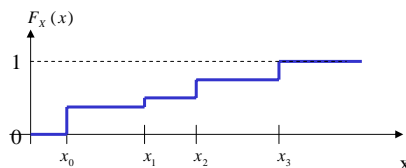
$$X \in \{x_0, x_1, x_2, \dots\} = \Omega$$

- Olkoon $0 \leq p_k \leq 1$ todennäköisyys, että X saa arvon x_k

$$\Pr\{X=x_k\} = p_k$$

- Kertymäfunktio (cumulative probability function, cdf)

$$F_X(x) \triangleq \Pr\{X \leq x\} = \sum_{l=0}^k p_l, \quad x_k \leq x < x_{k+1}$$



4.12.2007

10

Satunnaismuuttujat

- **Jatkuva satunnaismuuttuja** X voi saada arvoja ei numeroituvasta joukosta.

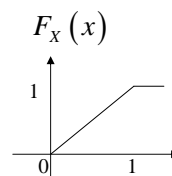
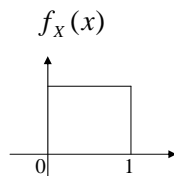
- Esim. $X \in \{x | 0 < x < 1\} = \Omega$

- Kertymäfunktio

$$F_X(x) \triangleq \Pr\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$$

- Todennäköisyystiheys

$$f_X(x)$$



4.12.2007

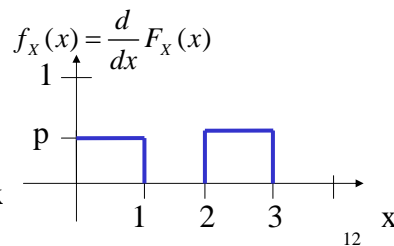
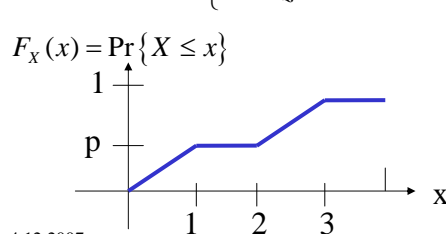
11

Satunnaismuuttujat

- Sekatyyppin satunnaismuuttuja sisältää sekä jatkuvia, että diskreettejä arvoja.
- Esim. $X=Y+Z$, Y jatkuva ja Z diskreetti

$$\Pr\{Y=0\} = p, \quad \Pr\{Y=2\} = 1-p$$

$$\Pr\{Z \leq z\} = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ z & 0 \leq z \leq 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$$



4.12.2007

12

Kertymäfunktio

- Kertymäfunktion on

$$F_X(x) \triangleq \Pr\{X \leq x\}$$

- Positiivinen ja rajattu

$$0 \leq F_X(x) \leq 1$$

- Ei-vähenevä

$$x \geq y \Leftrightarrow F_X(x) \geq F_X(y)$$

- Raja-arvot

$$F_X(-\infty) = 0$$

$$F_X(\infty) = 1$$

- Todennäköisyys

$$\Pr\{x_0 \leq X \leq x_1\} = F_X(x_1) - F_X(x_0) \\ = \int_{x_0}^{x_1} f_X(x) dx$$

- Pistetodennäköisyys

$$\Pr\{X = x\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{F_X(x) - F_X(x - \varepsilon)\}$$

- Jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa yksittäisen arvon todennäköisyys on differentiaalisen pieni.

- Diskreetin satunnaismuuttujan tapauksessa todennäköisyys on nolosta poikkeava kun

$$X \in \{x_0, x_1, x_2, \dots\} = \Omega$$

4.12.2007

13

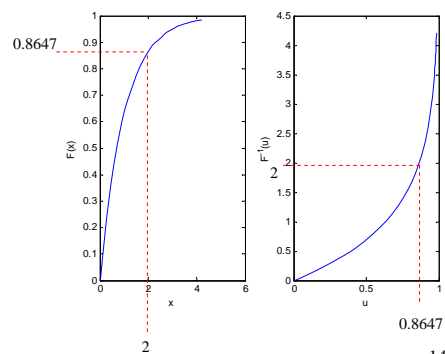
Prosenttipiste

- Satunnaismuuttujan X **prosenttipiste** (percentile) on pienin x_u siten, että

$$u = \Pr\{X \leq x_u\} = F_X(x_u), \quad 0 \leq u \leq 1$$

Eli, x_u saadaan kertymäfunktion käänteisfunktion avulla

$$x_u = F_X^{-1}(u)$$



4.12.2007

14

Todennäköisyys tiheys

- Todennäköisyys tiheys

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

- Ominaisuuksia

$$\begin{aligned} f_X(x) &\geq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx &= 1 \\ \int_{-\infty}^x f_X(x) dx &= F_X(x) \\ \int_{x_0}^{x_1} f_X(x) dx &= F_X(x_1) - F_X(x_0) \end{aligned}$$

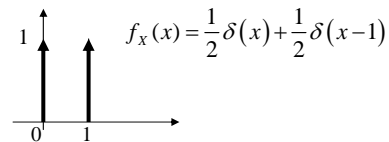
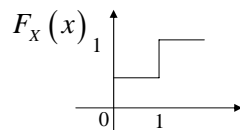
4.12.2007

15

Pistejakauma

- Pistejakauma** on diskreetin satunnaismuuttujan **todennäköisyystiheys** (probability density function, pdf)

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \sum_k \Pr\{X = x_k\} \delta(x - x_k)$$



- Esim. Nopan heiton pistejakauma

$$f_X(x) = \sum_{k=1}^6 \Pr\{X = x\} \delta(x - k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 \delta(x - k)$$

4.12.2007

16

Frekvenssi, empiirinen cdf

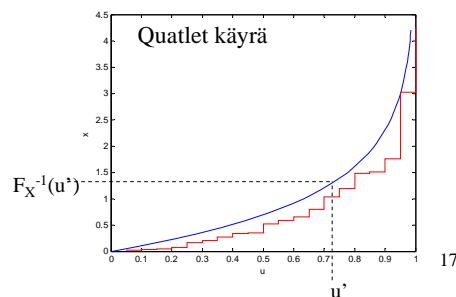
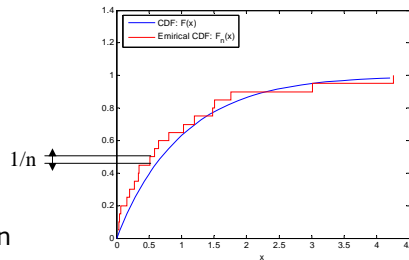
- Tehdään koe n kertaa ja havaitaan arvot x_n
- Arvoa x_0 vastaa todennäköisyys $1/n$
- Olkoon n_x niiden havaintojen määrä jotka ovat $\leq x$
- Empiirinen kumulatiivinen tiheysfunktio

$$F_n(x) = \frac{n_x}{n} \rightarrow \Pr\{X \leq x\} \triangleq F(x)$$

- Olkoon Δn_x niiden näytteiden määrä joille pätee, $x \leq X \leq x + \Delta x$ tällöin

$$f_x(x)\Delta x \approx \frac{\Delta n_x}{n}$$

4.12.2007



17

Tunnuslukuja

- **Odotusarvo** (expected value)

- Jatkuvalle jakaumalle

$$\mu_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

- Pistejakaumalle (diskreeteille satunnaisluville)

$$\mu_X = E\{X\} = \sum_{x \in \Omega} x \Pr\{X = x\}$$

- **Varianssi** (variance)

- Jatkuvalle jakaumalle

$$\sigma_X^2 = \text{var}\{X\} = E\{|X - E\{X\}|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} |x - E\{X\}|^2 p(x)dx$$

- Pistejakaumalle

$$\sigma_X^2 = \text{var}\{X\} = E\{|X - E\{X\}|^2\} = \sum_{x \in \Omega} |x - E\{X\}|^2 \Pr\{X = x\}$$

4.12.2007

18

Tunnuslukuja

- **Keskihajonta** (standard deviation)

$$\sigma_X = \sqrt{\text{var}\{X\}}$$

- **Kovarianssi** (covariance)

$$\text{cov}(X, Y) = E\{(X - E\{X\})(Y - E\{Y\})\}$$

- **Korrelaatiokerroin** (correlation coefficient)

$$\rho_{xy} = \frac{E\{(X - E\{X\})(Y - E\{Y\})\}}{\sqrt{E\{(X - E\{X\})^2\}E\{(Y - E\{Y\})^2\}}}$$

- **Momentti** (moment)

$$m_X^k = E\{X^k\}$$

4.12.2007

19

Bernolli-jakauma

- Kuvaa yksittäistä satunnaiskoetta, jonka tuloksena on onnistuminen 1 todennäköisyydellä p tai epäonnistuminen todennäköisyydellä $1-p$.

- Pistetodennäköisyydet

$$\Pr\{X = 1\} = p, \quad \Pr\{X = 0\} = 1 - p$$

- Odotusarvo

$$E\{X\} = 1\Pr\{X = 1\} + 0\Pr\{X = 0\} = p$$

$$\text{var}\{X\} = E\{(X - E\{X\})^2\}$$

$$= E\{X^2\} - (E\{X\})^2 = p(1 - p)$$

4.12.2007

20

Binomijakauma

- Onnistumisien lukumäärä n :ssä perättäisessä toisistaan riippumattomissa kokeessa.

$$X \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

- Pistetodennäköisyydet

$$\Pr\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$	Binomitekijä (binomial coefficient)
$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$	Kertoma (factorial)

- Kertymäfunktio

$$\Pr\{X \leq k\} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Odotusarvo

$$E\{X\} = \sum_{k=0}^n k \Pr\{X = k\} = np$$

- Varianssi

$$\text{var}\{X\} = \frac{np(1-p)}{1-p}$$

4.12.2007

21

Poisson-jakauma

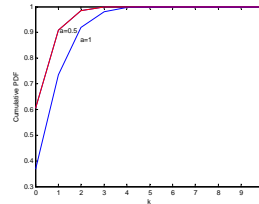
- Tarkastellaan Binomijakaumaa kun n kasvaa rajatta

- Olkoon

$$p = \frac{a}{n}, \quad 0 < a < n$$

- Tällöin

$$\begin{aligned} \Pr\{X = k\} &= 1 \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots n}{n^k} \frac{a^k}{k!} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-k} \rightarrow \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$



- Koska

$$\frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots n}{n^k} = \frac{n^k + n^{k-1}(\dots) + \dots}{n^k} \rightarrow 1$$

$$\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \rightarrow e^{-a}$$

4.12.2007

22

Poisson jakauma

- Oletusarvo

$$E\{X\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \Pr\{X=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

$$= ae^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = ae^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = a$$

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ Maclaurin sarja

- 2. momentti

$$E\{X^2\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{a^k}{k!} e^{-a} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{a^k}{k!} e^{-a} = ae^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{a^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= ae^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{a^k}{k!} = ae^{-a} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{a^k}{k!} e^{-a}}_{ae^{-a}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}}_{e^{-a}} \right) = a(a+1)$$

- Varianssi

$$E\{(X - E\{X\})^2\} = E\{X^2\} - E\{X\}^2 = a(a+1) - a^2 = a$$

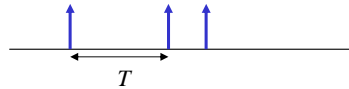
4.12.2007

23

Poisson jakauma

- Esimerkki.

- Uusia puheluita saapuu puhelinvaihteeseen Poisson jakautuneesti intensiteetillä λ puhelua minuutissa.
- Ratkaise kahden perättäisen saapuvan puhelun aikaeron jakauma.



- Ajassa t saapuu k puhelua todennäköisyydellä

$$\Pr\{X = k; t\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

- Saapumisaikojen ero on pienempi kuin t , jos ajassa t saapuu vähintään yksi puhelu

$$F_T(t) \triangleq \Pr\{T \leq t\} = 1 - \Pr\{X = 0; t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

- Jakauma saadaan derivoimalla:

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} \Pr\{T \leq t\} = \lambda e^{-\lambda t}$$

4.12.2007

24

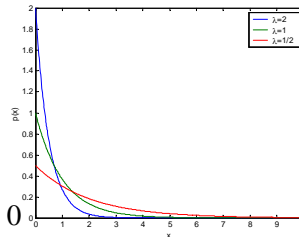
EkspONENTTijakauma

- Jakauma

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- Kertymäfunktio

$$F_X(x) \triangleq \Pr(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$



- Muistittomuus

$$\begin{aligned} \Pr(X > x + y | X > x) &= \frac{\Pr\{X > x + y, X > x\}}{\Pr\{X > x\}} \\ &= \frac{\Pr\{X > x + y\}}{\Pr\{X > x\}} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y} = \Pr\{X > y\} \end{aligned}$$

4.12.2007

25

Tasajakauma

- Jakauma

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}, \quad a < b$$

- Odotusarvo

$$E\{X\} = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2 - a^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{(b-a)(b+a)}{b-a} = \frac{1}{2}(b+a)$$

$$E\{X^2\} = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^3 - a^3}{3} \right) = \frac{1}{3} \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{b-a} = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2)$$

$$\text{var}\{X\} = (b-a) \left(\frac{4}{12}(b^2 + ab + a^2) - \frac{3}{12}(b^2 + 2ab + b^2) \right) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

4.12.2007

26

Kvantisointi

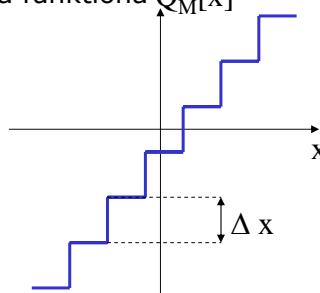
- Tarkastellaan M bittistä tasavälistä analogia – digitaalinen A/D muunninta.
- Kvantisointitasojen määrä on 2^M
- Oletetaan, että signaalin $x(t)$ amplitudi on rajoitettu välille $[-A, A]$.
- Tällöin kvantisointi voidaan esittää funktiona $Q_M[x]$

$$Q_M[x] = A \left\lfloor \frac{2^{M-1} \frac{x}{A}}{2^{M-1}} \right\rfloor + 2^{-1}$$

$\lfloor x \rfloor = \text{floor}(x)$ Pyöritys alaspäin

Kvantisointitasojen väli on

$$\Delta x = \frac{2A}{2^M} = \frac{A}{2^{M-1}}$$



4.12.2007

27

Kvantisointi

- Jos signaaliarvot ovat tasajakautuneita välille $[-1, 1]$, niin kvantisointi virhe e on tasajakautunut välille

$$E \in \left[-\frac{1}{2} \Delta x, \frac{1}{2} \Delta x \right]$$

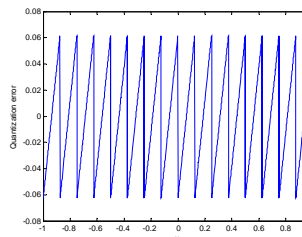
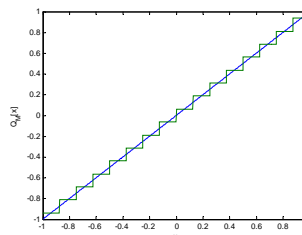
Kvantisointi virheen pdf

$$f_E(e) = \frac{1}{\Delta x}, \quad -\frac{1}{2} \Delta x \leq e \leq \frac{1}{2} \Delta x$$

- Kvantisointi virheen varianssi

$$\sigma_E^2 = \int_{-\frac{1}{2}\Delta x}^{\frac{1}{2}\Delta x} e^2 \frac{1}{\Delta x} de = \frac{(\Delta x)^2}{12}$$

M=4

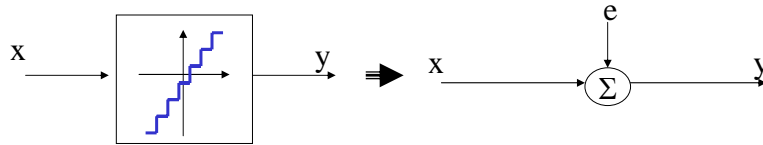


4.12.2007

28

Kvantisointi

- Kvantisointia voidaan mallittaa tasajakautuneena additiivisena kohinana



- Signaali kohina-suhde kvantisointilohkon ulostulossa sinimuotoiselle signaalille, jonka amplitudi on 1

$$SNR = \frac{P_x}{\sigma_e^2} = \frac{\frac{1}{2}A^2}{\frac{12}{(\Delta x)^2}} = \frac{\frac{1}{2}A^2}{\frac{12}{\left(\frac{2A}{2^M}\right)^2}} = \frac{3}{2} 2^{2M}$$

$$10 \log_{10}(SNR) = 10 \log_{10}\left(\frac{3}{2}\right) + 20M \log_{10}(2) \approx 1.76 \text{ dB} + 6.0206 \text{ dB/bitti}$$

4.12.2007

29

Normaalijakauma $N(\mu, \sigma)$

- Jakauma

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Odotusarvo

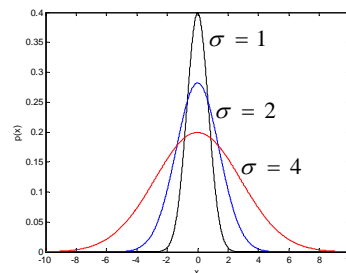
$$E\{X\} = \mu$$

- Varianssi

$$\text{var}\{X\} = \sigma^2$$

- Kertymäfunktio

$$\Pr\{X \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$



4.12.2007

30

Terminen kohina metalli johtimissa

- Johtuu varautuneiden partikkelien (elektronien) satunnaisesta liikkeestä johtavassa aineessa.
- Olkoon lämpötila T Kelviniä ja johtimen resistanssi R Ohmia, tällöin elektronien liike saa aikaan Normaalijakautuneen jännitteen jonka u keskiarvo on $0V$ ja varianssi on

$$E\{u^2\} = \frac{2(\pi kT)^2}{3h} R \approx 1.9 \cdot 10^{-12} T^2 R$$

neliövolttia.

T lämpötila

k Boltzmannin vakio

h Plankin vakio

4.12.2007

31

Satunnaislukujen summa

- Tarkastellaan kahden satunnaisluvun summaa
 $Y = X_1 + X_2$

joiden kertymäfunktiot ja todennäköisyyssiheydet ovat

$$\Pr\{X_1 \leq x\} = F_{x1}(x) \quad \Pr\{X_2 \leq x\} = F_{x2}(x)$$

$$\frac{d}{dx} F_{x1}(x) = f_{x1}(x) \quad \frac{d}{dx} F_{x2}(x) = f_{x2}(x)$$

- Ratkaistaan ensin ehdollinen todennäköisyys

$$\Pr\{Y \leq y | X_2 = x_2\} = \Pr\{X_1 \leq y - x_2\} = F_1(y - x_2)$$

- Kokonaistodennäköisyys saadaan integroimalla X_2 :n jakauman yli

$$\Pr\{Y \leq y\} = \int_{-\infty}^{\infty} F_{x1}(y - x_2) f_{x2}(x_2) dx_2$$

- Tiheysfunktio saadaan tästä derivoimalla

$$f_y(y) = \frac{d}{dy} \Pr\{Y \leq y\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x1}(y - x_2) f_{x2}(x_2) dx_2 \quad \text{Konvoluutio integraali}$$

4.12.2007

32

Keskeinen raja-arvo lause

(Central limit theorem)

Olkoon X_1, X_2, \dots, X_N joukko riippumattomia satunnaissuureita. Satunnaissuure X_i :n todennäköisyystiheys $f_i(x)$ voi olla mielivaltainen kunhan sen odotusarvo μ_i ja varianssi σ_i^2 ovat rajoitettuja. Summa

$$Z_N = \sum_{i=1}^N \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)$$

lähestyy $N(0,1)$ jakaumaa kun $N \rightarrow \infty$.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr\{Z_N < x\} = \Phi(x)$$

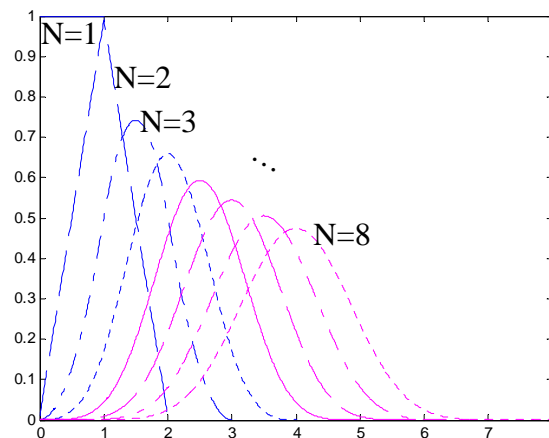
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

4.12.2007

33

Keskeinen raja-arvo lause

- Tarkastellaan N tasajakautuneen $U(0,1)$ muuttujan summan todennäköisyystiheyttä



4.12.2007

34

Normalisoitu Normaalijakauma

- Taulukoista löytyy $N(0,1)$

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

- Yleisestä tapauksesta päästään tähän muuttujan vaihdolla

$$y = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- Usein tarvitaan häntätodennäköisyyttä (tail probability)

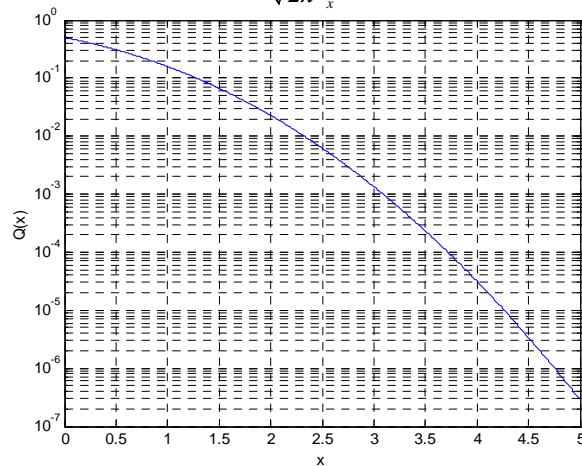
$$Q(y) = \Pr\{Y > y\} = 1 - \Pr\{Y \leq y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

4.12.2007

35

Normalisoitu Normaalijakauma

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$



4.12.2007

36

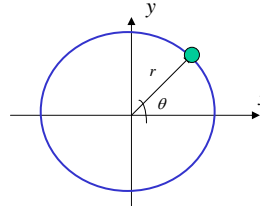
Kompleksinen normaalijakauma

- Tarkasellaan satunnaissuuretta
 $z = x + iy = re^{i\phi}$ $x, y \sim N(0, \sigma^2)$
 - Satunnaissuure $u = zz^* = x^2 + y^2$ on eksponenttijakautunut

$$p(u) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}u\right), \quad u \geq 0$$
 - Satunnaissuure $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ on Rayleigh-jakautunut

$$p(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}r^2\right), \quad r \geq 0$$
 - Satunnaissuure ϕ on tasajakautunut

$$p(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$



4.12.2007

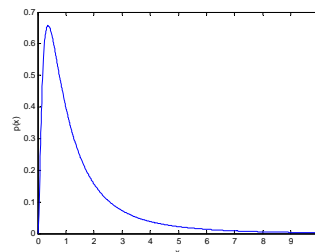
37

Log-normaalijakauma

- Olkoon X normaalijakautunut satunnaismuuttuja, tällöin $Y = e^{\alpha X}$, $\alpha > 0$ on log-normaalijakautunut. Eli, Y :n logaritmi on normaali jakautunut.

$$\Pr\{e^{\alpha X} < y\} = \Pr\left\{X < \frac{1}{\alpha} \ln y\right\} = P_x\left(\frac{1}{\alpha} \ln y\right)$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{y} p_x\left(\frac{1}{\alpha} \ln y\right), \quad y > 0$$



4.12.2007

38

Pareto-jakauma

- Jakauma

$$p(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}}, \quad b > 0, x > b$$

a muoto parametri (shape parameter)

b skaalaus parametri (scale parameter)

- Kertymä

$$\Pr\{X < x\} = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a, \quad x \geq b$$

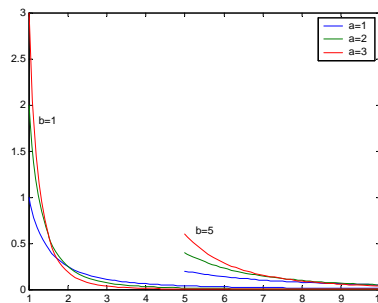
- Odotusarvo

$$E\{X\} = \begin{cases} \frac{ab}{a-1} & a > 1 \\ \infty & a \leq 1 \end{cases}$$

- Varianssi

$$\text{var}\{X\} = \begin{cases} \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)} & a > 2 \\ \infty & a \leq 2 \end{cases}$$

4.12.2007



Pareto-jakauma on ns. paksuhäntäinen (heavy tailed) jakauma.

39

Yhteisjakauma

- Olkoon X_1 ja X_2 satunnaismuuttujia.
- Todennäköisyyttä tapahtumalle $\{X_1 < x_1\} \cap \{X_2 < x_2\}$ merkitään $\Pr\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\}$
- Kertymäfunktio

$$F(x_1, x_2) = \Pr\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\}$$

- Yhteisjakauma

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F(x_1, x_2)$$

- Todennäköisyys

$$\Pr\{x_{10} < X_1 < x_{11}, x_{20} < X_2 < x_{21}\} = \int_{x_{10}}^{x_{11}} \int_{x_{20}}^{x_{21}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

- Yleistäminen N :lle muuttujalle on triviaalia.

4.12.2007

40

Ehdollinen todennäköisyys

- Ehdollinen todennäköisyys

$$\Pr\{x_{10} < X_1 < x_{11} | x_{20} < X_2 < x_{21}\} = \frac{\Pr\{x_{10} < X_1 < x_{11}, x_{20} < X_2 < x_{21}\}}{\Pr\{x_{20} < X_2 < x_{21}\}}$$

$$= \frac{\int_{x_{10}}^{x_{11}} \int_{x_{20}}^{x_{21}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{\int_{x_{20}}^{x_{21}} f(x_2) dx_2}$$

- Ehdollinen jakauma

$$f(x_1 | x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \Pr\{X_1 < x_1 | X_2 < x_2\} = \frac{\int_{x_2}^{x_1} f(x_1, x_2) dx_1}{\int_{-\infty}^{x_2} f(x_2) dx_2}$$

4.12.2007

41

Yhteisjakauma

- Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat *riippumattomia*, niin

$$F_{X,Y}(x, y) \triangleq \Pr\{X \leq x, Y \leq y\} = \Pr\{X \leq x\} \Pr\{Y \leq y\} = F_X(x) F_Y(y)$$

$$f_{X,Y}(x, y) \triangleq \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Pr\{X \leq x, Y \leq y\} = \frac{\partial}{\partial x} \Pr\{X \leq x\} \frac{\partial}{\partial y} \Pr\{Y \leq y\} = f_X(x) f_Y(y)$$

- Ehdollinen todennäköisyys

$$\Pr\{X \leq x | Y \leq y\} = \frac{\Pr\{X \leq x, Y \leq y\}}{\Pr\{Y \leq y\}} = \frac{\Pr\{X \leq x\} \Pr\{Y \leq y\}}{Y \leq y} = \Pr\{X \leq x\}$$

- Kovarianssi

$$\text{cov}(X, Y) = E\{(X - E\{X\})(Y - E\{Y\})^n\}$$

$$= E\{(X - E\{X\})\} E\{(Y - E\{Y\})^n\} = 0$$

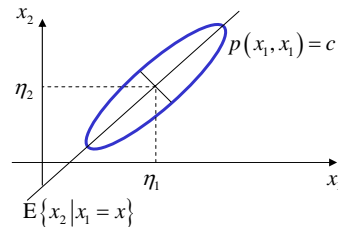
4.12.2007

42

Yhteisjakauma

- Esimerkki: 2-dimensioinen Gaussinen jakauma

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)}\left(\frac{(x_1-\eta_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho_{12}(x_1-\eta_1)(x_2-\eta_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\eta_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right)$$



$$E\{x_1^2\} = \eta_1, \quad E\{x_2^2\} = \eta_2$$

$$E\{(x_1 - \eta_1)^2\} = \sigma_1^2, \quad E\{(x_2 - \eta_2)^2\} = \sigma_2^2$$

$$E\{(x_1 - \eta_1)(x_2 - \eta_2)\} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

- Jos $\rho_{12} = 0$, niin satunnaismuuttujat ovat riippumattomia.
- Jos $\rho_{12} = 1$, niin $x_2 = ax_1 + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

4.12.2007

43

Stokastiset prosessit

- Stokastinen prosessi on joukko satunnaismuuttujia $\{X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$, jota indeksoi reaaliarvoinen parametri t (yleensä aika)
- Indeksijoukkoa $t \in T$ kutsutaan prosessin *parametriavaruudeksi*.
- Jokainen yksittäinen satunnaismuuttuja on kuvaus otosavaruudesta reali- (tai kompleksi-) tasoon. Alkeistapausta ω vastaavaa parametrisoitua joukkoa kutsutaan satunnaisluvun $X(t)$ *realisaatioksi/trajektoriksi/poluksi*.
- Usein käytetään laiskaa notaatiota ja samaistetaan stokastinen prosessi sen realisaatioon.

4.12.2007

44

Stokastiset prosessit

- *Tila-avaruus* (state-space) on $X(t)$:n mahdollisten lukujen joukko. (vrt. satunnaisluvun otosavaruus)
 - Tila-avaruus on *diskreetti*, jos tilojen lukumäärä on rajallinen tai numeroituva
Diskreettilainen/Diskreettiaikainen prosessi/sekvenssi/ketju(chain)
 $\{X(t_k)\}, t \in \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$
 - Tila-avaruus on *jatkuva*, jos aikaindeksi kuuluu ei-numeroituvaan jatkuvaan joukkoon
Jatkuvatilainen/Jatkuva-aikainen prosessi $X(t), t \in (0, \infty]$

4.12.2007

45

Stokastiset prosessit

- Tilastolliset ominaisuudet ovat ajan funktioita
 - Kertymäfunktio

$$F_X(x; t) = \Pr\{X(t) \leq x\}$$

- Tiheysfunktio

$$f_X(x; t) = \frac{d}{dx} F_X(x; t)$$

4.12.2007

46

Stokastiset prosessit

- Odotusarvo

$$\eta_x(t) = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x, t) dx$$

- Autokorrelaatio

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X^*(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X,X}(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

- Ristikorrelaatio

$$\phi_{xy}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)Y^*(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y; t_1, t_2) dx dy$$

- Autokovarianssi

$$C_{xx}(t_1, t_2) = E\{(X(t_1) - E\{X(t_1)\})(X(t_2) - E\{X(t_2)\})^*\} = \phi_{xx}(t_1, t_2) - \eta_x(t_1)\eta_x(t_2)$$

- Ristikovarianssi

$$C_{xy}(t_1, t_2) = E\{(X(t_1) - E\{X(t_1)\})(Y(t_2) - E\{Y(t_2)\})^*\} = \phi_{xy}(t_1, t_2) - \eta_x(t_1)\eta_y(t_2)$$

4.12.2007

47

Stokastiset prosessit

- Kaksi stokastista eivät korreloi, jos

$$\phi_{xy}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)Y^*(t_2)\} = E\{X(t_1)\}E\{Y^*(t_2)\} = \eta_x(t_1)\eta_y(t_2)$$

$$\text{Cov}_{xy}(t_1, t_2) = 0$$

- Kaksi stokastista prosessia ovat *ortogonaalisia*, jos

$$\phi_{xy}(t_1, t_2) = 0$$

- Jos stokastisten prosessien välillä on lineaarinen riippuvuussuhde $y(t) = ax(t) + b$

$$\phi_{xy}(t_1, t_2) = a\phi_{xx}(t_1, t_2) + b\eta_x(t_1)$$

$$\rho_{xx}(t_1, t_2) = \frac{\text{Cov}_{xy}(t_1, t_2)}{\sqrt{\phi_{xx}(t_1, t_2)\phi_{yy}(t_1, t_2)}} = 1 \quad \text{Korrelaatiokerroin}$$

4.12.2007

48

Poisson prosessi

- Tarkastellaan saapumisprosessia, jossa asiakkaita saapuu intensiteetillä λ siten, että aikavälissä $(0,t)$ saapuu k asiakasta todennäköisyydellä

$$\Pr\{X(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

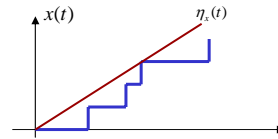
- Saapuneiden asiakkaiden kokonaismäärä $X(t)$ on stokastinen prosessi $X(0) = 0$

- 1. ja 2. momentit

$$\eta_x(t) = E\{X(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t$$

$$E\{X^2(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda^2 t^2 + \lambda t(a+1)$$

$$E\{X(t_1) - X(t_2)\} = \lambda(t_2 - t_1)$$



4.12.2007

49

Poisson prosessi

- Autokorrelaatio

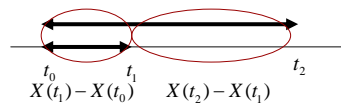
$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = E\{(X(t_1) - X(0))((X(t_1) - X(0)) + (X(t_2) - X(t_1)))\}, \quad t_2 \geq t_1$$

$$= E\{(X(t_1) - X(0))^2\} + E\{(X(t_1) - X(0))\} E\{X(t_2) - X(t_1)\}$$

$$= \lambda^2 t_1^2 + \lambda t_1 + \lambda t_1 \lambda (t_2 - t_1)$$

$$= \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2$$

Muuttuja $X(t_2) - X(t_1)$ on riippumaton $X(t_1) - X(t_0)$:sta.



4.12.2007

50

N-dimensioiset stokastiset prosessit

- Yhteisjakauma ja kertymäfunktio

$$f(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = p(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

$$F_X(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \Pr\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$$

$$\mathbf{X} = [X(t_1) \quad X(t_2) \quad \dots \quad X(t_n)]^T, \quad \mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$$

$$\mathbf{t} = [t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_n]^T$$

- Jos $X(t_k)$:t riippumattomia, niin

$$f(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \prod_{k=1}^n p(x_k, t_k) \quad F_X(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \prod_{k=1}^n \Pr\{X(t_k) \leq x_k\}$$

- Jos satunnaissekvenssi on stationaarinen

$$F_X(\mathbf{x}; \mathbf{t} + \tau) = F_X(\mathbf{x}; \mathbf{t})$$

4.12.2007

51

Stationaariset prosessit

- *Stationaarisuus* (wide sense stationarity): Tilastolliset ominaisuudet ajasta riippumattomia.

$$m_x = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X^*(t_1 + \tau)\} = E\{X(t)X^*(t + \tau)\} = \phi_{xx}(\tau), \quad t_2 - t_1 = \tau$$

- *Ergodisuus*: Tilastolliset ominaisuudet voidaan määrittää yksittäisestä realisaatiosta. => Aikakeskiarvo vastaa oletusarvoa.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt = E\{X(t)\} = m_x$$

- *Riippumattomuus* (independency):

$$E\left\{\left(X(t_1) - E\{X(t_1)\}\right)\left(X(t_2) - E\{X(t_2)\}\right)^*\right\} = \begin{cases} \text{var}\{X(t_1)\}, & t_1 = t_2 \\ 0, & t_1 \neq t_2 \end{cases}$$

- Stokastisen prosessin tiheysfunktio saadaan eri ajan hetkille määriteltyjen todennäköisyystiheyksien tulona.

4.12.2007

52

Stationääriset prosessit

- Stationäärisen ergodisen stokastisen signaalin **keskimääräinen teho**

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = E\{x(t)x^*(t)\} = \phi_{xx}(0)$$

4.12.2007

53

Valkoinen kohina

- Tarkastellaan stationaarista normaalijakautunutta $N(0, \sigma)$ prosessia. Tällöin

$$p(x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2(t)}{2\sigma^2}}$$

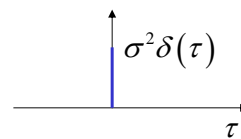
$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x^*(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)x(t_2) \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2(t_1)+x^2(t_2)}{2\sigma^2}} dx(t_1)dx(t_2), \tau = t_2 - t_1$$

$$= \phi_{xx}(\tau) = E\{x(t)x^*(t+\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)x(t_1+\tau) \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2(t_1)+x^2(t_1+\tau)}{2\sigma^2}} dx(t_1)dx(t_1+\tau)$$

$$= \begin{cases} 0 & \tau \neq 0 \\ \sigma^2 & \tau = 0 \end{cases}$$

- Kohinan keskimääräinen teho

$$P = E\{|X(t)|^2\} = \phi_{xx}(0) = \sigma^2$$



4.12.2007

54

Stokastiset prosessit

- Esimerkki: Valkoisen kohinan aikakeskiarvo

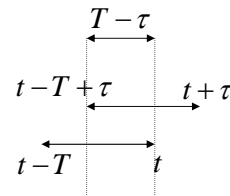
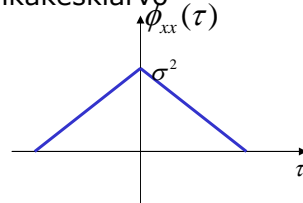
$$x(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t z(t) dt \quad z(t) \sim N(0, \sigma^2)$$

$$E\{x(t)\} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t E\{z(t)\} dt = 0$$

$$\phi_{xx}(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = \frac{1}{T^2} \int_{t-T}^t \int_{t-T+\tau}^{t+\tau} E\{z(t_1)z(t_2)\} dt_1 dt_2$$

$$= \frac{1}{T^2} \int_{t-T}^t \int_{t-T+\tau}^{t+\tau} \sigma^2 \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2$$

$$= \frac{\sigma^2}{T^2} \int_{t \in [t-T, t] \cap [t-T+\tau, t+\tau]} dt = \begin{cases} \sigma^2 \frac{(T-|\tau|)}{T^2} & |\tau| < T \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$



4.12.2007

55

Syklostationäärinen prosessi

- Prosessi on **syklostationäärinen** jos sen *autokorrelaatiofunktio on periodinen*

$$\phi_{xx}(t + \tau + kT, t + kT) = \phi_{xx}(t + \tau, t)$$

T jaksonaika

- Keskimääräinen autokorrelaatio

$$\bar{\phi}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} \phi_{xx}(t + \tau, t) dt$$

- Keskimääräinen teho

$$P = \bar{\phi}_{xx}(0)$$

4.12.2007

56

Syklostationäärinen prosessi

- Esimerkki: Tarkastellaan binäärisekvenssiä $\{b_n, n = 1, 2, \dots\}$, jossa arvot 0 ja 1 ovat yhtä todennäköisiä ja niiden arvot ovat toisistaan riippumattomia.

$$\Pr\{b_n = 1\} = 1 - \Pr\{b_n = 0\} = 0.5$$

- Määritellään kuvaus bitistä "jännitetasoksi"

$$I_n = 2b_n - 1$$

$$E\{I_n\} = -1 \cdot \Pr\{b_n = 0\} + 1 \cdot \Pr\{b_n = 1\} = 0$$

$$\phi_{II}(k) = E\{I_n I_{n+k}\} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

4.12.2007

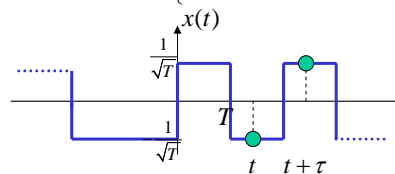
57

Syklostationäärinen prosessi

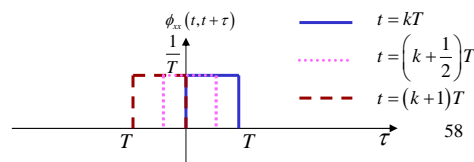
- Esimerkki. Jono satunnaisia toisistaan riippumattomia bittejä $\Pr\{I_k = -1\} = \Pr\{I_k = 1\} = \frac{1}{2}$ $E\{I_k I_l\} = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g(t - kT)$$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$



$$\phi_{xx}(t, t + \tau) = E\{x(t)x(t + \tau)\} = \begin{cases} \frac{1}{T} & kT - t \leq \tau \leq (k+1)T - t, kT \leq t \leq (k+1)T \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$



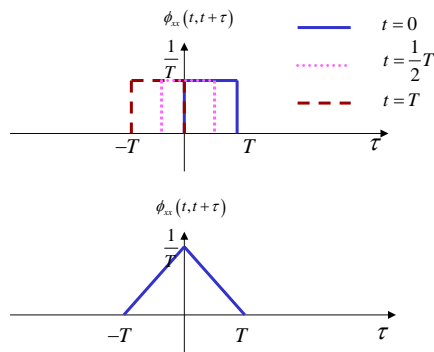
4.12.2007

58

Syklostationäärinen prosessi

- Periodiselle signaalille pätee

$$\bar{\phi}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} \phi_{xx}(t+\tau, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \phi_{xx}(t+\tau, t) dt$$



4.12.2007

59

Syklostationäärinen prosessi

- Systemaattinen tapa

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g(t-kT)$$

$$\phi_{xx}(t, t+\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_k I_l g(t-kT)g(t-lT) \right\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} E\{I_k I_l\} g(t-kT)g(t+\tau-lT)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E\{I_k I_{k+m}\} g(t-kT)g(t+\tau-(k+m)T)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{II}(m) g(t-kT)g(t+\tau-(k+m)T)$$

4.12.2007

60

Syklostationäärinen prosessi

- Määritellään pulssin autokorrelaatio

$$\phi_{gg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t+\tau)dt$$

- Keskimääräinen autokorrelaatio

$$\bar{\phi}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} \phi_{xx}(t+\tau, t)dt =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{II}(m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{2}T-kT}^{\frac{1}{2}T-kT} g(t)g(t+\tau-mT)dt$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{II}(m) \phi_{gg}(\tau - mT) \quad \text{Konvoluutio}$$

4.12.2007

61