Luento 11

- Stokastisen prosessin tehospektri
- Satunnaissignaalin suodatus

Stationaariset prosessit

- ***Autokorrelaatio***

$$\phi_{xx}(t_1,t_2) = E\left\{x(t_1)x^*(t_2)\right\} = E\left\{x(t_1)x^*(t_1+\tau)\right\}, \quad \tau = t_2 - t_1$$

jos prosessi on stationaarinen autokorrelaatio ei riipu ajasta t_1 vaan ainoastaan tarkasteluajanhetkien välistä τ

$$\boxed{\phi_{xx}(t_1,t_2) = E\left\{x(t_1)x^*(t_1+\tau)\right\} = \phi_{xx}(\tau) \quad \forall t_1}$$

- ***Ergodisuus***: Tilastolliset ominaisuudet voidaan määrttää yksittäisestä realisaatiosta. => Aikakeskiarvo vastaa oletusarvoa.

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt = E\left\{x(t)\right\} = m_x}$$

- Ergodisen signaalin *keskimääräinen teho*

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|x(t)\right|^2 dt = E\left\{x(t)x^*(t)\right\} = \phi_{xx}(0)}$$

Stokastisen prosessin tehospektri

- Stationaarisen stokastisen prosessin korrelaatiofunktion Fourier muunnos

$$\Phi_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau$$ x:n tehospektri

$$\Phi_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau$$ x:n ja y:n ristitehospektri

- Käänteismuunnos

$$\phi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f) e^{i2\pi f \tau} df$$ x:n autokorrelaatio

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(f) e^{i2\pi f \tau} df$$ x:n ja y:n ristikorrelaatio

Stokastisen prosessin tehospektri

- Reaaliselle prosessille $x(t) \in \mathbb{R}$
  - autokorrelaatio on symmetrinen ja reaalinen

    $$\boxed{\phi_{xx}(-\tau) = \phi_{xx}(\tau) \in \mathbb{R}}$$

  - tehospektri on symmetrinen, reaalinen ja ei-negatiivinen

    $$\boxed{\Phi_{xx}(-f) = \Phi_{xx}(f) \in \mathbb{R}^+}$$

- Jos kaksi stokastista prosessia x ja y ovat ortogonaaleja

  $$\phi_{xy}(\tau) = 0 \Rightarrow \Phi_{xy}(f) = 0$$

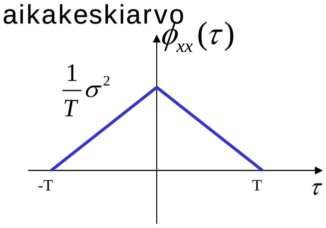
  - Tällöin prosessille $z = x + y$ pätee

    $$\phi_{zz}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) + \phi_{yy}(\tau)$$

    $$\Phi_{zz}(f) = \Phi_{xx}(f) + \Phi_{yy}(f)$$

Esimerkki

- Esimerkki: Valkoisen kohinan aikakeskiarvo



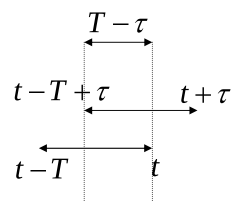
$$x(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} z(t)dt$$

$$\mathrm{E}\{x(t)\} = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} \mathrm{E}\{z(t)\}\,dt = 0$$

$$\phi_{xx}(\tau) = \mathrm{E}\{x(t)x(t+\tau)\} = \frac{1}{T^2}\int_{t-T}^{t}\int_{t-T+\tau}^{t+\tau} \mathrm{E}\{z(t_1)z(t_2)\}dt_1dt_2$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_{t-T}^{t}\int_{t-T+\tau}^{t+\tau} \sigma^2\delta(t_1-t_2)dt_1dt_2$$

$$= \frac{\sigma^2}{T^2}\int_{t\in\{t-T,t\}\cap\{t-T+\tau,t+\tau\}} dt = \begin{cases} \sigma^2\dfrac{(T-|\tau|)}{T^2} & |\tau|\le T \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$



Esimerkki

- Keskiarvoistetun kohinan autokorrelaatiofunktio

$$\phi_{xx}(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2}{T}\dfrac{(T-|\tau|)}{T} & |\tau|\le T \\ 0 & |\tau|>T \end{cases}$$

- Fourier muunnos

= Tehospektri

$$\Phi_{xx}(f) = \frac{\sigma^2}{T}\mathrm{sinc}^2(fT)$$

- Kolmiopulssi aikatasossa

$$s(t) = \begin{cases} A\dfrac{(T-|t|)}{T} & |t|\le T \\ 0 & |t|>T \end{cases}$$

- Fourier muunnos

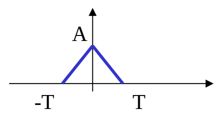
$$S(f) = A\mathrm{sinc}^2(fT)$$

- Spektritiheys

$$|S(f)|^2 = A^2\mathrm{sinc}^4(fT)$$

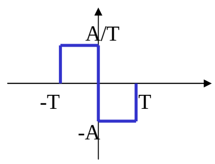
Esimerkki

- Kolmiopulssi



$$s(t)=\begin{cases} A\dfrac{\left(T-|t|\right)}{T} & |t|\le T \\ 0 & |t|>T \end{cases}$$

- Kolmiopulssin aikaderivaatta



$$\frac{d}{dt}s(t)=\frac{A}{T}\Pi\left(\frac{t+\frac{1}{2}T}{T}\right)-\frac{A}{T}\Pi\left(\frac{t-\frac{1}{2}T}{T}\right)$$

$$\boxed{\Pi(t)=\begin{cases} 1 & |t|\le\frac{1}{2} \\ 0 & |t|>\frac{1}{2} \end{cases}}$$

Esimerkki

- Fourier muunnetaan aikaderivaatta

$$\frac{d}{dt}s(t)=\frac{A}{T}\Pi\left(\frac{t+\frac{1}{2}T}{T}\right)-\frac{A}{T}\Pi\left(\frac{t-\frac{1}{2}T}{T}\right)$$

$$\boxed{F\left\{A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right\}=AT\mathrm{sinc}\left(fT\right)}$$

$$\boxed{F\left\{s(t-\tau)\right\}=e^{-i2\pi f\tau}S\left(f\right)}$$

$$F\left\{\frac{d}{dt}s(t)\right\}=A\mathrm{sinc}\left(fT\right)e^{i2f\frac{T}{2}}-A\mathrm{sinc}\left(fT\right)e^{-i2f\frac{T}{2}}$$
$$=i2A\mathrm{sinc}\left(fT\right)\sin\left(fT\right)$$

- s(t):n Fourier-muunnos saadaan nyt integroimiskeinon avulla

$$\boxed{F\left\{\underbrace{\int_{-\infty}^{t}\ldots\int_{-\infty}^{\tau_1}}_{n\ \mathrm{kpl}} s(\tau_1)d\tau_1\ldots d\tau_n\right\}=\frac{1}{(i2\pi f)^n}S(f)}$$

$$S\left(f\right)=\frac{1}{i2\pi ft}F\left\{\frac{d}{dt}s(t)\right\}=\frac{i2A\mathrm{sinc}\left(fT\right)\sin\left(fT\right)}{i2\pi f}=A\mathrm{sinc}^2\left(fT\right)$$

Stokastinen raja-arvo

- Stokastinen prosessi on *jatkuva lähes kaikilla realisaatioilla (almost all outcomes)*, jos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(t+\varepsilon) = x(t)$$

$$\boxed{\Pr\left\{\lim_{\varepsilon\to 0} x(t+\varepsilon) \neq x(t)\right\} = 0}$$

- Stokastinen prosessi on *jatkuva odotusarvon* mielessä (mean sense, m.s.) jos

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0} E\left\{\left(x(t+\varepsilon) - x(t)\right)^2\right\} = 0}$$

tällöin myös

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\left\{x(t+\varepsilon)\right\} = E\left\{x(t)\right\}$$

Stokastinen raja-arvo

- Tarkastellaan stationaarista stokastista prosessia jonka autokorrelaatio funktio on jatkuva

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0} \phi_{xx}(t+\varepsilon) = \phi_{xx}(t)}$$

Prosessi on m.s. jatkuva jos sen autokorrelaatiofunktio on jatkuva

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0} E\left\{\left(x(t+\varepsilon) - x(t)\right)^2\right\} = 0}$$

$$E\left\{\left(x(t+\varepsilon) - x(t)\right)^2\right\} = E\left\{x^2(t+\varepsilon)\right\} - 2E\left\{x(t+\varepsilon)x(t)\right\} + E\left\{x^2(t)\right\}$$

$$= \phi_{xx}(0) - 2\phi_{xx}(\varepsilon) + \phi_{xx}(0)$$

$$= 2\phi_{xx}(0) - 2\phi_{xx}(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0$$

Stokastinen derivaatta

- Derivaatta voidaan määritellään m.s. jatkuvalle prosessille

$$\boxed{x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} = 0}$$

- Ristikorrelaatio

$$\phi_{x'x}(t_1,t_2) = E\left\{x'(t_1)x(t_2)\right\} = E\left\{\frac{x(t_1+\varepsilon)-x(t_1)}{\varepsilon}x(t_2)\right\}$$

$$= E\left\{\frac{x(t_1+\varepsilon)x(t_2)-x(t_1)x(t_2)}{\varepsilon}\right\} = \frac{\phi_{xx}(t_1+\varepsilon,t_2)-\phi_{xx}(t_1,t_2)}{\varepsilon} \to \underline{\frac{d}{dt_1}\phi_{xx}(t_1,t_2)}$$

- Ristikorrelaatio

$$\phi_{xx'}(t_1,t_2) = E\left\{x(t_1)x'(t_2)\right\} = E\left\{x(t_1)\frac{x(t_2+\varepsilon)-x(t_2)}{\varepsilon}\right\}$$

$$= E\left\{\frac{x(t_1)x(t_2+\varepsilon)-x(t_2)x(t_1)}{\varepsilon}\right\} = \frac{\phi_{xx}(t_1,t_2+\varepsilon)-\phi_{xx}(t_1,t_2)}{\varepsilon} \to \underline{\frac{d}{dt_2}\phi_{xx}(t_1,t_2)}$$

5.12.2007 11

Stokastinen derivaatta

- Autokorrelaatio

$$\phi_{x'x'}(t_1,t_2) = E\left\{\frac{x(t_1+\varepsilon)-x(t_1)}{\varepsilon}x'(t_2)\right\} = E\left\{\frac{x(t_1+\varepsilon)x'(t_2)-x(t_1)x'(t_2)}{\varepsilon}\right\}$$

$$= \frac{\phi_{xx'}(t_1+\varepsilon,t_2)-\phi_{xx'}(t_1,t_2)}{\varepsilon} \to \frac{d}{dt_1}\phi_{xx'}(t_1,t_2) = \underline{\frac{d^2}{dt_1dt_2}\phi_{xx}(t_1,t_2)}$$

- Stationäärisen prosessin tapauksessa

$$\phi_{x'x'}(\tau) = \phi_{x'x'}(t,t+t_2-t_1) = \frac{d^2}{dt_1dt_2}\phi_{xx}(t_2-t_1) \qquad \tau = t_2 - t_1$$

$$= -\frac{d^2}{dt_1dt_2}\phi_{xx}(t_2-t_1) = \underline{-\frac{d^2}{d\tau^2}}\phi_{xx}(\tau)$$

5.12.2007 12

Stokastinen integraali

- Integraali

$$s = \int_{t_1}^{t_2} x(t)dt$$

m.s. olemassa, jos

$$\boxed{E\left\{\left(s - \sum_{k=0}^{\frac{T}{\Delta t}-1} x(k\Delta t)\Delta t\right)^2\right\} \to 0, \quad \Delta t \to 0}$$

- Oletusarvo

$$E\{s\} = \int_{t_1}^{t_2} E\{x(t)\}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \eta_x(t)dt$$

- 2. Momentti

$$E\{s^2\} = \int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} E\{x(t_1)x(t_2)\}\,dt_1dt_2 = \int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} \phi_{xx}(t_1,t_2)dt_1dt_2$$

5.12.2007 13

Stokastisen prosessin tehospektri

- Prosessi – autokorrelaatio - tehospektri

$$x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \phi_{xx}(-\tau) = \phi_{xx}(\tau) \Leftrightarrow \Phi_{xx}(-f) = \Phi_{xx}(f)$$

$x(t)$	$\phi_{xx}(\tau)$	$\Phi_{xx}(f)$
$ax(t)$	$\lvert a\rvert^2 \phi_{xx}(\tau)$	$\lvert a\rvert^2 \Phi_{xx}(f)$
$\frac{d}{dt}x(t)$	$-\frac{d^2}{d\tau^2}\phi_{xx}(\tau)$	$(2\pi f)^2 \Phi_{xx}(f)$
$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$-\frac{d^{2n}}{d\tau^{2n}}\phi_{xx}(\tau)$	$(2\pi f)^{2n} \Phi_{xx}(f)$
$x(t)e^{\pm i2\pi f_c t}$	$\phi_{xx}(\tau)e^{\pm i2\pi f_c t}$	$\Phi_{xx}(f \mp f_c)$

5.12.2007 14

Stokastisen prosessin tehospektri

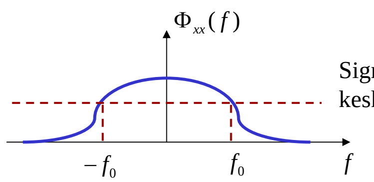
- Tehospektrin tulkinta

$$\phi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f) e^{i2\pi f\tau} df = E\left\{x(t)x^*(t+\tau)\right\}$$

$$\boxed{\phi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f) df = E\left\{\left|x(t)^2\right|\right\}}$$

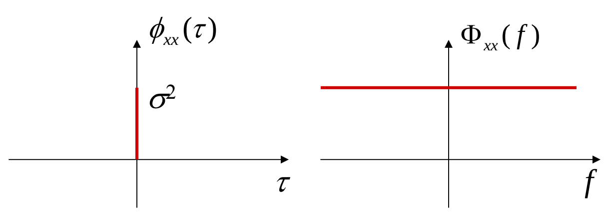
Tehospektrin pinta-ala vastaa signaalin keskimääräinen tehoa

Wiener-Khinchin teoreema



Signaalin f_0:taajuisen komponentin keskimääräinen teho

Valkoinen kohina

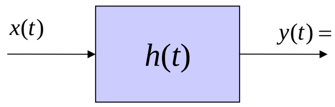


Valkoisen kohinan energia on tasajakautunut kaikille taajuuksille.

$$\phi_{xx}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$$

$$\Phi(f) = \sigma^2 \quad \forall f \in \mathbb{R}$$

Satunnaissignaali lineaarisessa järjestelmässä



$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = h(t)\otimes x(t)$$

Lineaarinen systeemi

- Ristikorrelaatio

$$\phi_{yx}(\tau)=E\left\{y(t)x^*(t+\tau)\right\}=E\left\{y(t'+\tau)x^*(t')\right\}$$

$$=E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t'+\tau-\lambda)x^*(t')dt\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)E\left\{x(t'+\tau-\lambda)x^*(t')\right\}dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\phi_{xx}(\tau-\lambda)dt = h(\tau)\otimes\phi_{xx}(\tau)$$ konvoluutiointegraali

Satunnaissignaali lineaarisessa järjestelmässä

- Autokorrelaatio

$$\phi_{yy}(\tau)=E\left\{y(t)y^*(t+\tau)\right\}=E\left\{y(t+\tau)y^*(t)\right\}$$

$$=E\left\{y(t)\int_{-\infty}^{\infty} h^*(\lambda)x^*(t'+\tau-\lambda)dt\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)E\left\{y(t)x^*(t'+\tau-\lambda)\right\}dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\phi_{yx}(\tau-\lambda)dt = h(\tau)\otimes\phi_{yx}(\tau)$$

Suodattimen tehospektri

- Konvoluutiota τ-tasossa vastaa kertolasku f-tasossa, joten

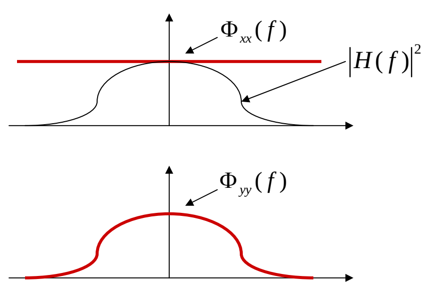
$$\boxed{\Phi_{yx}(f) = H(f)\Phi_{xx}(f)}$$

$$\boxed{\Phi_{yy}(f) = H^{*}(f)\Phi_{yx}(f)}$$

$$\boxed{\Phi_{yy}(f) = \left|H(f)\right|^{2}\Phi_{xx}(f)}$$

Wiener-Khintchine teoreema

Kohinan suodattaminen



$$\boxed{\Phi_{yy}(f) = \left|H(f)\right|^{2}\Phi_{xx}(f)}$$

Stokastiset differentiaaliyhtälöt

- Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

missä $x(t)$ on jokin stokastinen prosessi, jonka tehospektri on $\Phi_{xx}(f)$

- Ratkaistaan differentiaaliyhtälön impulssivasteen Fourier muunnos $x(t) = \delta(t)$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (i2\pi f)^k Y(f) = \sum_{k=0}^{m} b_k (i2\pi f)^k X(f)$$

Fourier muunnetaan itse differentiaaliyhtälö

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (i2\pi f)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k (i2\pi f)^k}$$

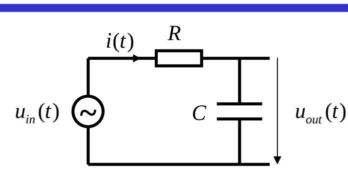
$X(f) = 1$ impulssin tapauksessa.

- Tehospektri

$$\boxed{\Phi_{yy}(f) = |H(f)|^2 \Phi_{xx}(f) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (i2\pi f)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k (i2\pi f)^k} \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (-i2\pi f)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k (-i2\pi f)^k} \Phi_{xx}(f)}$$

5.12.2007 21

Esimerkki. RC-suodatin



$$i(t) = C \frac{d}{dt} u_{out}(t)$$

$$u_{in}(t) = Ri(t) + u_{out}(t)$$

$$\frac{d}{dt} u_{out}(t) = \frac{1}{RC}\left(u_{in}(t) - u_{out}(t)\right)$$

Impulssivaste

$$\frac{d}{dt} h(t) = \frac{1}{RC}\left(\delta(t) - h(t)\right)$$

$$\Rightarrow i2\pi f H(f) = \frac{1}{RC}\left(1 - H(f)\right)$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{\frac{1}{RC}}{i2\pi f + \frac{1}{RC}}$$

Tehospektri

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{i2\pi fRC + 1} \frac{1}{-i2\pi fRC + 1} = \frac{1}{(2\pi fRC)^2 + 1}$$

5.12.2007 22

Esimerkki. RC-suodatin

- Lähtösignaaliin muodostuu jännitelähteen muodostamasta signaalista ja termisestä kohinasta

$u_{in}(t) = e(t) + x(t)$

$E\{x(t)\} = 0$

$e(t) = U\cos(2\pi f_0 t)$

$E(f) = \frac{U}{2}\left(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right)$

$\Phi_{xx}(f) = \frac{1}{2}N_0$

$\Phi_{ee}(f) = |E(f)|^2 = \frac{U^2}{4}\left(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right)$

- Ulostulo muodostuu kahdesta signaalista

$$u_{out}(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e(t-\lambda)h^*(\lambda)d\lambda}_{y} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)h^*(\lambda)d\lambda}_{z} = y(t) + z(t)$$

Esimerkki. RC-suodatin

- Ulostulosignaalin autokorrelaatio

$$\phi_{zy}(\tau) = E\{z(t)y^*(t+\tau)\} = E\{z(t)\}E\{y^*(t+\tau)\} = 0$$

$$\phi_{yz}(\tau) = E\{y(t+\tau)z^*(t)\} = E\{y(t+\tau)\}E\{z^*(t)\} = 0$$

$$E\{z(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{x(t-\lambda)\}h^*(\lambda)d\lambda$$

$$\phi_{uu}(\tau) = \phi_{yy}(\tau) + \phi_{zu}(\tau) + \phi_{zy}(\tau) + \phi_{zz}(\tau) = \phi_{yy}(\tau) + \phi_{zz}(\tau)$$

Ristitermit menevät nollaan, koska signaalit y ja z ortogonaaliset

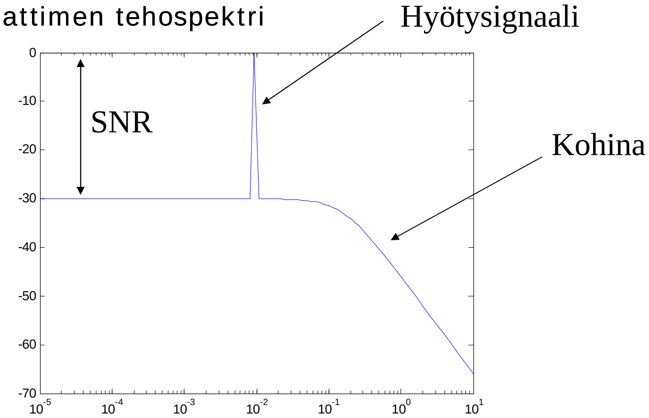
- Ulostulon tehospektri

$$\Phi_{uu}(f) = |H(f)|^2\left(|E(f)|^2 + \Phi_{xx}(f)\right)$$

$$= \frac{1}{4}|H(f_0)|^2\left(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right) + \frac{1}{2}N_0|H(f)|^2$$

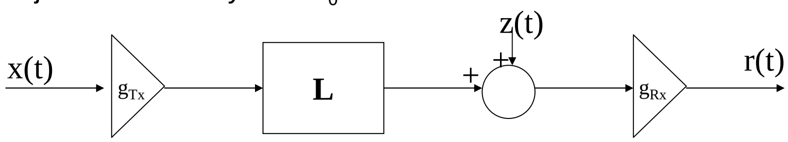
RC-suodatin

- RC-Suodattimen tehospektri



Signaali-kohina suhde

- Tarkastellaan kantataajuisen signaalin x(t) siirtoa additiivinen Gaussinen (AWGN) kanavan yli
  - Signaalin kaistanleveys on B_x
  - Signaalin teho on $P_x=A^2$ (A sini-muotoisen signaalin amplitudi)
  - Kanavan vaimennus on 1/L
  - Signaaliin x(t) summautuu valkoista kohinaa z(t), jonka tehotiheys on N_0 W/Hz



Signaali-kohina suhde

- Kohinan tehotiheys

$$N_0 = kT_N = kT_0 \frac{T_N}{T_0} \approx 4 \cdot 10^{-21} \frac{T_N}{T_0} \text{ W/Hz}$$

T_N Kohinan lämpötila (0.2...10 T_0)

T_0 Nominaali lämpötila

5.12.2007 27

Signaali-kohina suhde

- Vastaanotettu signaali

$$r(t) = \frac{g_{Rx} g_{Tx}}{L} x(t) + g_{Rx} z(t)$$

- Signaalikohinasuhde:

$$SNR = \frac{E\left\{\left|\frac{g_{Rx} g_{Tx}}{L} x(t)\right|^2\right\}}{E\left\{\left|g_{Rx} z(t)\right|^2\right\}} = \frac{\frac{g_{Rx}^{\ 2} g_{Tx}^{\ 2}}{L} A^2}{g_{Rx}^{\ 2} N_0 B} = \frac{\frac{g_{Tx}^{\ 2}}{L^2} A^2}{N_0 B}$$

Vahvistin vastaanottimessa vaikuttaa
sekä signaaliin, että kohinaan

5.12.2007 28

Spektraalifaktorointi

Tehospektriä

$$\Phi_{yy}(f) = |H(f)|^2 \Phi_{xx}(f)$$

vastaa kaksi erilaista prosessia. Toisessa suodattimena on $H(f)$ ja toisessa $H^*(f)$. Molemmilla on samat tilastolliset ominaisuudet.

Esimerkki

$$\Phi_{yy}(f) = \frac{1}{(2\pi f)^2 + 1} \Phi_{xx}(f)$$

$$H(f) = \frac{1}{1 + i2\pi f} \Leftrightarrow h(t) = e^{-t}$$

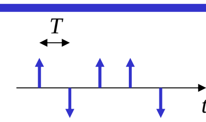
Stabiili IIR (Infinite Impulse Response) suodin

$$H^*(f) = \frac{1}{1 - i2\pi f} \Leftrightarrow h(t) = e^{t}$$

Epästabiili IIR suodin

Diskreettiaikaisen prosessin tehospektri

- Tarkastellaan prosessia



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k \delta(t - kT)$$

missä I_k on jokin diskreettiaikainen stokastinen prosessi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k \delta(t - kT)$$

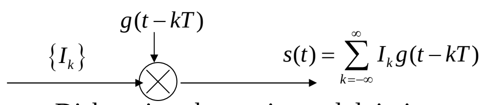
$$\phi_{xx}(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = \begin{cases} E\{I_l I_{l+k}\}\delta(t) & \tau = kT \\ 0 & muutoin \end{cases}$$

$$\phi_{xx}(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = \begin{cases} \phi_{II}(k) & \tau = kT \\ 0 & muutoin \end{cases}$$

$$\boxed{\Phi_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_{II}(k) e^{-2\pi fkT}}$$

Diskreetti Fourier muunnos

Moduloitu bittisekvenssi



Diskreetin sekvenssin modulointi

- Voidaan tulkita konvoluutioksi

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k \delta\left(t-kT\right)$$

$$s(t)=x\otimes g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k \delta\left(\tau-kT\right) g\left(t-\tau\right)d\tau=\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g(t-kT)$$

- Tehospektri

$$\Phi_{ss}(f)=\left|G(f)\right|^2\Phi_{xx}(f)$$

Syklostationäärisen prosessin tehospekti

- Syklostationäärisen prosessin $\phi_{xx}(t+\tau+kT,t+kT)=\phi_{xx}(t+\tau,t)$ keskimääräinen autokorrelaatio

$$\boxed{\bar{\phi}_{xx}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}\phi_{xx}(t+\tau,t)dt}$$

- Tehospektri

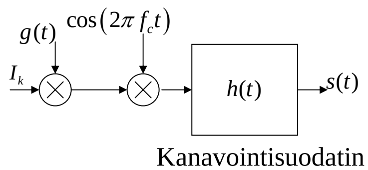
$$\boxed{\Phi_{xx}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\phi}_{xx}(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau}$$

- Keskimääräinen teho

$$\boxed{P=\bar{\phi}_{xx}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{xx}(f)df}$$

Lähetin

- Lineaarinen amplitudi modulaatio



$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$

$$|G(f)|^2 = T^2 \operatorname{sinc}^2(fT)$$

$$\Phi_{ss}(f) = H(f)\left(\frac{1}{2}G(f+f_c) + \frac{1}{2}G(f-f_c)\right)\Phi_{II}(f)$$

- Jos symbolit $I_k \in \{\pm 1\}$ toisistaan riippumattomia satunnaismuuttujia, $\Phi_{II}(f) = 1$
- Jos kanavointisuodatinta ei käytetä $|H(f)|^2 = 1$

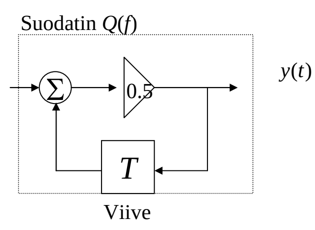
Kanavakoodaus

- Prosessoidaan lähetettävää bittijonoa

$$Y_k = \frac{1}{2}(Y_{k-1} + I_k) \in \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, 0\right\}$$

- Tulkinta

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k \delta(t - kT)$$



$$Q(f) = \frac{1}{2 - e^{-i2\pi fT}}$$

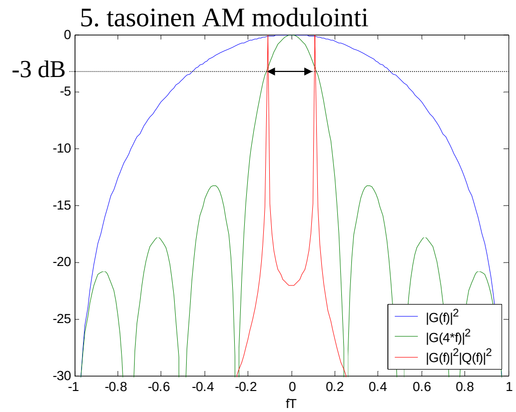
- Tehospektri

$$\Phi_{YY}(f) = |Q(f)|^2 \Phi_{II}(f)$$

Eli käsittelemällä lähetettävää bittijonoa (koodaamalla) voidaan vaikuttaa myös tehospektriin.

Moduloidun signaalin spektri

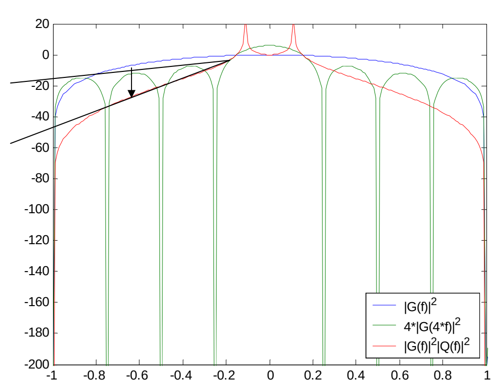
- Koodaamalla kaista kapenee, mutta samalla myös siirrettävän informaation määrä vähenee samassa suhteessa.



5.12.2007 35

Moduloidun signaalin spektri

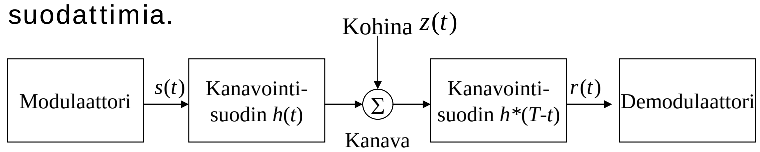
- Mitä ”pehmeämmin” signaali muttuu ajassa, sitä kapeammalle kaistalle signaalin energia on jakautunut.



5.12.2007 36

Kaistarajoitettu kanava

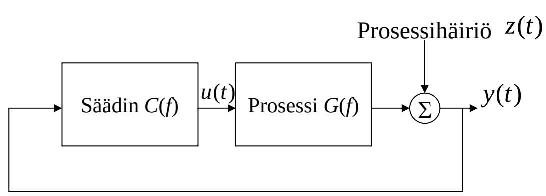
- Pulssimuotoisten modulointimenetelmien ongelmana on niiden spektrin leveys, eli naapurikaistalle vuotavan tehon suuri määrä.
- Kaistan rajoittamiseksi käytetään kanavointi suodattimia.



$$\Phi_{rr}(f) = |X(f)|^2 |S(f)|^2 + |H(f)|^2 \Phi_{zz}(f)$$
$$X(f) = |H(f)|^2$$

Säätötekniikkaa...

- Lineaarinen regulaattori



$$\Phi_{yy}(f) = \left| \frac{C(f)G(f)}{1 + C(f)G(f)} \right|^2 \Phi_{zz}(f)$$

- Neliöllinen säätövirhe $E\{y^2(t)\} = \Phi_{yy}(0)$
- Minimivarianssisäätö

$\min_{C \in C(G)} \Phi_{yy}(0)$

$C(G)$ Prosessin G stabiloivien säädinten joukko

$$C(G) = \left\{ C(f) : \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(f)G(f)}{1 + C(f)G(f)} e^{i2\pi ft} df \right| < \infty \quad \forall t \right\}$$