

12. Luento

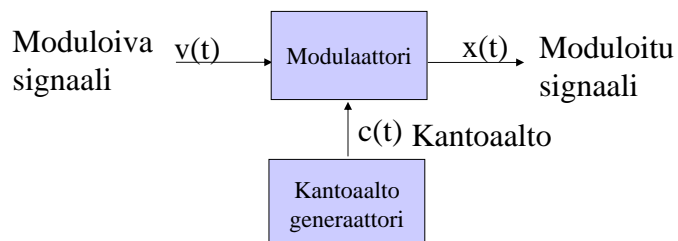
- Analoginen modulaatio
- Digitaalinen modulaatio

11.12.2007

1

Modulaatio

- *Modulaatiossa siirretään moduloivan signaalin spektri kantaallon taajuusalueelle, joko siten että*
 - spektrin muoto säilyy *linearisessa modulaatiossa*, tai niin että
 - spektrin muoto muuttuu *epälinearisessa modulaatiossa*



11.12.2007

2

Modulaatio

Modulaatiota käytetään:

- Siirrettävillä signaaleilla päällekkäisiä spektrikomponentteja
 - Jos siirrettävien signaalien spektrit ovat osittain tai kokonaan päällekkäisiä voidaan siirtokanavassa siirtää vain yksi signaali ilman modulaatiota
- Moduloivan signaalin taajuuskaista saattaa olla häiriöllinen
 - Esim. ilmakehästä tulevat ukkoshäiriöt ja ihmisen aiheuttamat häiriöt ovat voimakkaampia matalilla taajuuksilla
- Signaalin sovittaminen siirtomeediaan
 - Esim. radioantennin koko (vähintään $\lambda/10$) olisi 300 Hz äänitaajuudella 100 km. 3 kHz taajuudella taas riittäisi 10 km. Sen lisäksi että nämä pituudet ovat käytännössä useimmiten mahdottomia, antennin tulevan signaalin suhteellisen kaistaleveyden tulee olla pieni.
- Siirtomeedian tehokas hyväksikäyttö
 - Siirtojohtoissa ja radiotaajuusalueessa saadaan moninkertainen siirtokapasiteetti käyttämällä modulaatioon perustuvaa taajuusjakokanavoittoa
- Suorituskyvyn parantaminen kohinaisessa ja interferenssiä sisältävässä siirtokanavassa
 - Esimerkiksi hajaspektritekniikka

11.12.2007

3

Modulointi

- Moduloivana signaalina käytetään

- Siniaaltoa

$$c(t) = \sqrt{2P_c} \cos(2\pi f_c t + \phi)$$

P_c kantoaallon keskimääräinen teho

f_c kantoaallon taajuus

ϕ kantoaallon perusvaihe

Modulaatiossa kantoaallon amplitudi, vaihe tai hetkellinen taajuus tai useita kantoaaltoparametreja muuttuu (yleensä lineaarisesti) moduloivan signaalin amplitudin funktiona.

- Esim. Amplitudi-, vaihe- ja taajuusmodulaatio

11.12.2007

4

Modulointi

- Pulssijonoa

$$c(t) = \sum_k a_k p_k(t - \tau_k - kT)$$

$p_k(t)$ pulssin muoto
 a_k pulssin amplitudi
 τ_k pulssinpaikka näytejonossa
 T näytejakson pituus

Pulssimodulaatioissa pulssijonon yksittäisten pulssien amplitudi, kesto tai paikka muuttuu (yleensä lineaarisesti) moduloivan signaalinäytteen amplitudin funktiona

- Esim. Pulssinpituus modulaatio, UWB-impulssiradio
- Satunnaissignaalia

11.12.2007

5

Siniaaltoon perustuva modulaatio

- Modulaatiomenetelmät voidaan jakaa
 - Analoginen modulaatio: moduloiva signaali on jatkuva-amplitudinen ja jatkuva-aikainen
 - Digitaalinen modulaatio: moduloiva signaali on diskreetti-amplitudinen ja diskreetti-aikainen
- Kummassakin tapauksessa moduloitu signaali on jatkuva amplitudinen ja jatkuva-aikainen
- Demoduloinnin tehtävänä on palauttaa alkuperäinen signaali moduloidusta signaalista.
 - Koherentti modulaatio: Modulaattori ohjaa suoraan signaalin vaihetta.
 - Epäkoherentti modulaatio: Modulaattori ohjaa signaalin taajuutta.
 - Koherentti vastaanotto: Vastaanotetun signaalin vaihe tunnetaan.
 - Epäkoherentti vastaanotto: Signaalin vaihetta ei tunneta.

11.12.2007

6

Modulointi

		analogiset modulaatio- menetelmät	digitaaliset modulaatio- menetelmät
lineaariset modulaatio-menetelmät		AM, DSB, SSB, VSB	ASK, QAM
epälineaariset modulaatio- menetelmät	vaihemodu- laatiot	PM	PSK, CPM
	taajuusmodu- laatiot	FM	FSK

AM	Amplitude modulation	ASK	Amplitude shift keying
DSB	Double sideband modulation	QAM	Quadarature amplitude modulation
SSB	Suppressed sideband modulation	PSK	Phase shift keying
(VSB	Vestigial sideband modulation)	CPM	Continuous phase modulation
PM	Phase Modulation	FSK	Frequency shift keying
FM	Frequency Modulation		

11.12.2007

7

Modulointitaajuuden valinta

- Mitä suurempi on signaalin taajuuskaista sitä suurempi on myös modulointitaajuuden oltava.
- Käytännössä

$$0.01 < \frac{W}{f_c} < 0.1$$

W Signaalin puolentehonkaistanleveys
 f_c kantoaallon taajuus

Taajuuskaista	Kantoaallon taajuus	Signaalin kaistanleveys ($0.02f_c$)
Pitkäaalto	100 kHz	2 kHz
Lyhytaalto	5 MHz	100 kHz
VHF	100 Mhz	2 Mhz
Mikroaalto	5 GHz	100 MHz
Millimetriaalto	100 GHz	2 GHz
Optinen	$5 \cdot 10^{14}$ Hz	10^3 Hz

11.12.2007

8

Ekvivalentti alipäästösignaali esitys

- Tarkastellaan moduloitua sinimuotoista signaalia

$$x(t) = a(t) \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) = \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{a(t)e^{i\phi(t)}}_{x_i(t)} e^{i2\pi f_c t} \right\}$$

- Ekvivalentti alipäästösignaali

$$x_i(t) = a(t)e^{i\phi(t)} = a(t) \cos \phi(t) + ia(t) \sin \phi(t)$$

- Reaalisen moduloidun signaalin $x(t)$ sijaan analyysi voidaan suorittaa käyttäen kompleksia kantataajuista signaalia $x_i(t)$, kunhan huomataan, että ekvivalentin alipäästösignaalin teho on kaksinkertainen todellisen moduloidun signaalin tehoon nähden.

11.12.2007

9

Ekvivalentti alipäästösignaali esitys

- Signaalin energia on puolet ekvivalentin alipäästösignaalin energiasta

$$x_i(t) = a(t)e^{i\phi(t)}$$

$$x(t) = \operatorname{Re} \left\{ x_i(t)e^{i2\pi f_c t} \right\} = \frac{1}{2} \left(x_i(t)e^{i2\pi f_c t} + x_i^*(t)e^{-i2\pi f_c t} \right)$$

$$\operatorname{Re}\{z\} = \frac{1}{2}(z + z^*)$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ x_i(t)e^{i2\pi f_c t} \right\}^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \left(x_i(t)e^{i2\pi f_c t} + x_i^*(t)e^{-i2\pi f_c t} \right) \right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |x_i(t)|^2 dt + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |x_i(t)|^2 \cos(4\pi f_c t + 2\arg\{x_i(t)\}) dt}_{=0}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |x_i(t)|^2 dt$$

E_{x_i}

11.12.2007

10

Ekvivalentti alipäästösignaali esitys

- Tarkastellaan moduloitua signaalia

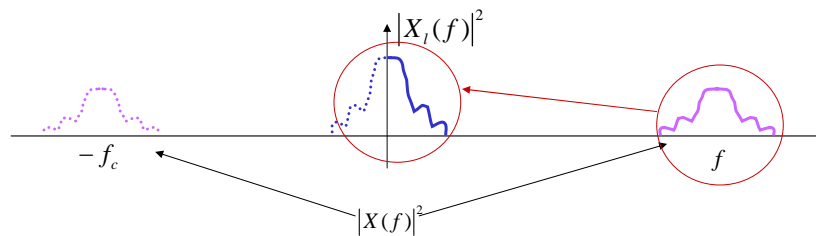
$$x(t) = v(t) \cos(2\pi f_c t) = \operatorname{Re}\{v(t)e^{i2\pi f_c t}\}$$

$$x_I(t) = v(t)$$

$$X(f) = \frac{1}{2}(V(f - f_c) + V(f + f_c))$$

$$X_I(f) = V(f)$$

$v(t)$ on moduloitava signaali
 f_c kantaallon taajuus



11.12.2007

11

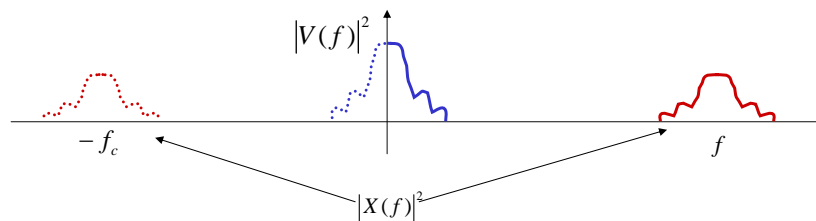
DSB Amplitudi modulaatio

DSB (Double-sideband suppressed carrier) modulaatio

$$x(t) = v(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$X(f) = \frac{1}{2}(V(f - f_c) + V(f + f_c))$$

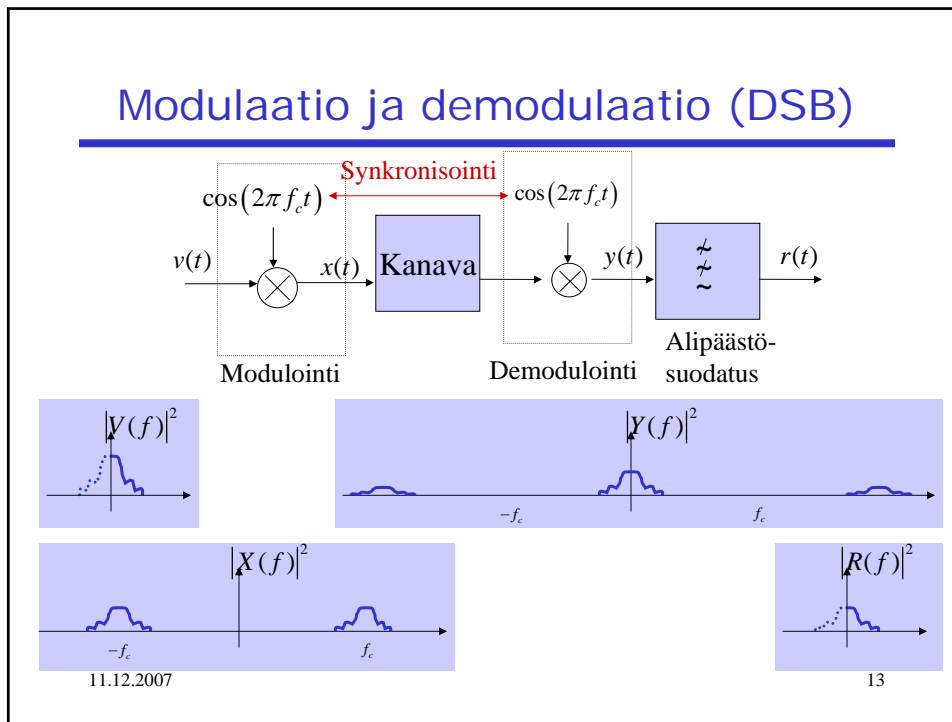
$v(t)$ on moduloitava signaali
 f_c kantaallon taajuus



11.12.2007

12

Modulaatio ja demodulaatio (DSB)



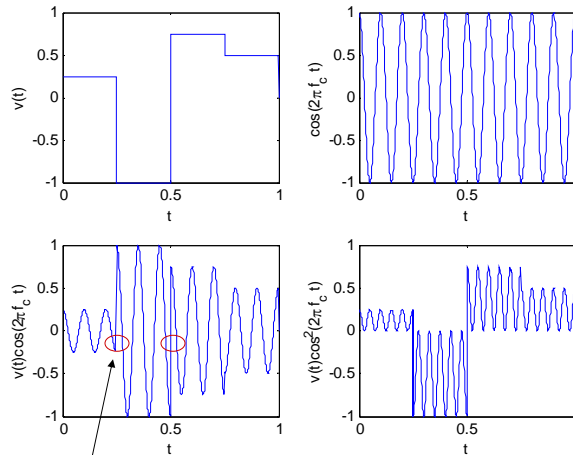
Modulaatio ja demodulaatio (DSB)

- Analoginen moduloiva signaali
 $v(t)$
- Moduloitu signaali
 $x(t) = v(t) \cos(2\pi f_c t)$
 $X(f) = \frac{1}{2}(V(f - f_c) + V(f + f_c))$
- Vastaanottimessa sekoitettu signaali
 $y(t) = v(t) \cos^2(2\pi f_c t) = v(t) \frac{1}{2}(1 + \cos(4\pi f_c t))$
 $y(f) = \frac{1}{2}(X(f - f_c) + X(f + f_c)) = \frac{1}{2}V(f) + \frac{1}{4}(V(f - 2f_c) + V(f + 2f_c))$
- Suodatetaan korkeat taajuudet pois
 $r(t) = \frac{1}{2}v(t)$

11.12.2007

14

DSB Amplitudi modulaatio

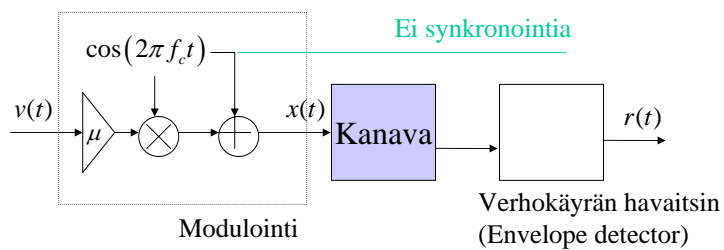


Vaihe muuttuu 180°

11.12.2007

15

AM Amplitudi modulaatio



AM modulaatio (Amplitude modulation)

- Olkoon signaalin teho rajoitettu
 $|v(t)|^2 \leq 1$

- Tarkastellaan modulaatiota μ modulaatio indeksi

$$x(t) = (1 + \mu v(t)) \cos(2\pi f_c t), 0 < \mu < 1$$

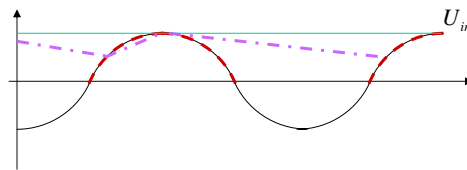
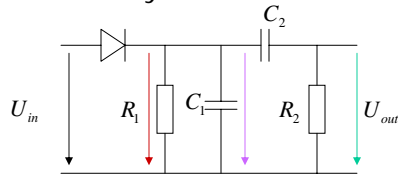
$$X(f) = \frac{1}{2} (\mu V(f - f_c) + \delta(f - f_c) + \mu V(f + f_c) + \delta(f + f_c))$$

11.1

16

AM Amplitudi modulaatio

- Verhokäyrän havaitsin on suodatin



11.12.2007

17

AM vrt DSB

- DSB moduloinin vastaanotossa tarvitaan tieto signaalin vaiheesta
- AM modulaattorin vastaanotin perustuu verhokäyrän havaitsijaan => Paljon helpompi toteuttaa kuin DSB
- AM moduloidussa signaalissa tehoa kuluu informaation siirtämisen lisäksi kanta-aallon siirtoon => DSB on energia tehokkaampi

$$x_{DSB,l}(t) = v(t) \Rightarrow P_{x,DSB} = \frac{1}{2} P_{v,DSB}$$

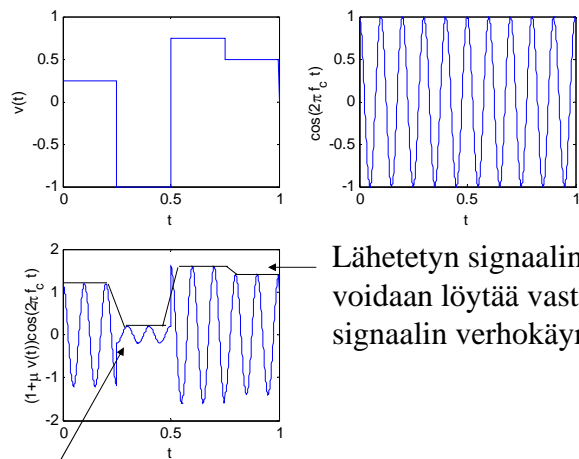
$$x_{AM,l}(t) = \mu v(t) + 1 \Rightarrow P_{x,DSB} = \frac{1}{2} (\mu^2 P_{v,DSB} + 1)$$

kanta-aallon teho

11.12.2007

18

AM Amplitudi modulaatio



Lähetetyn signaalin aaltomuoto voidaan löytää vastaanotetun signaalin verhoikäyrästä.

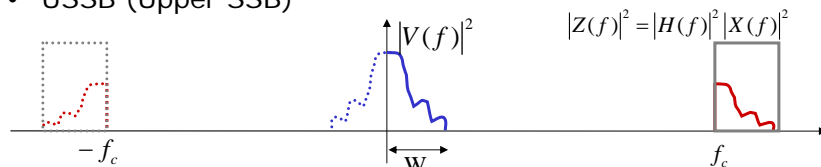
Ei vaiheen muutosta
11.12.2007

19

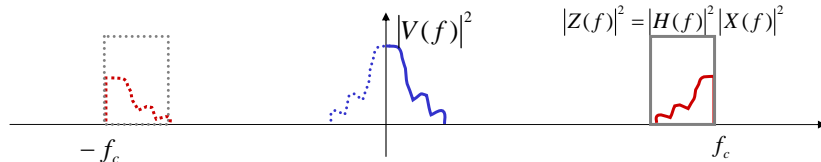
SSB amplitudimodulaatio

SSB (Supressed-sideband amplitude modulation)

- Kuten DSB, mutta signaalista suodatetaan peilikuva osuus pois. Tarvittava taajuuskaista puolittuu.
- USSB (Upper SSB)



- LSSB (Lower SSB)

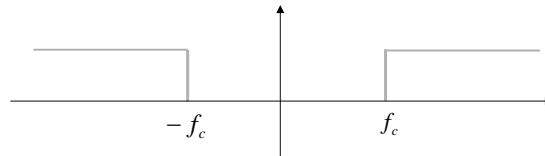


11.12.2007

20

SSB amplitudimodulaatio

- USSB voidaan toteuttaa ylipäästösuodattimella



- Ekvivalentti alipäästömalli

$$H_i(f) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign } f)$$

$$X_i(f) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign } f)V(f)$$

$$x_i(t) = \frac{1}{2}(v(t) + i\hat{v}(t))$$

$$\hat{v}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau) \frac{1}{t-\tau} d\tau \quad v(t)\text{:n Hilbert muunnos}$$

11.12.2007

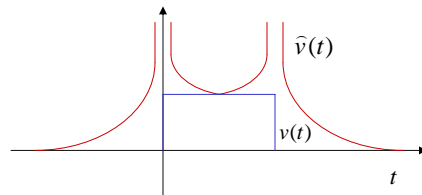
21

SSB amplitudimodulaatio

- Hilbert muunnos on konvoluutio $1/(\pi t)$:n kanssa

$$\hat{v}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau) \frac{1}{t-\tau} d\tau$$

- Pulssin Hilbert muunnos ei ole kaikkialla äärellinen => Ei siis sovellettu datan siirtoon.



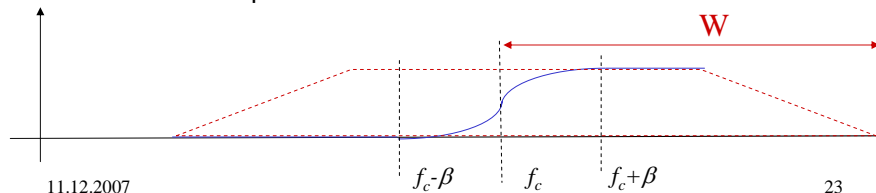
- Monissa käytännön sovelluksissa joudutaan siis tyytymään siihen, että siirtoon tarvittava taajuuskaista on $2W$.

11.12.2007

22

VSB-modulaatio

- SSB:ssä tarvitaan ideaalinen suodatin, jota ei voi käytännössä realisoida
- VSB (Vestigial sideband) modulaatio perustuu AM (VSB+C) tai DSB signaalin suodattamiseen käytännöllisellä suodattimella, jonka ylimenokaistan leveys on 2β
- Jos $\beta \ll W$, VSB approksimoi SSB:tä, jos taas $W \ll \beta$, VSB approksimoi DSB:tä.
- VSB-modulaatiota käytetään esim. analogisen tv-kuvan siirrossa kaapelitelevisiossa



AM amplitudimodulaatio ja kohina

- Gaussinen kanava (z on valkoista kohinaa)

$$z(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) + n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$E\{n_I^2(t)\} = E\{n_Q^2(t)\} = \frac{1}{2} N_0, \quad E\{z^2(t)\} = \frac{1}{2} N_0$$

Vastaanotettu signaali, ennen havaitsemista

$$y(t) = x(t) + z(t) = (A_c(1 + \mu v(t)) + n_I(t)) \cos(2\pi f_c t) + n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

- Ekvivalentti alipäästö signaali

$$y_I(t) = A_c(1 + \mu v(t)) + n_I(t) + n_Q(t) e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$y_I(t) = \sqrt{(A_c(1 + \mu v(t)) + n_I(t))^2 + n_Q(t)^2} e^{j \arctan\left(\frac{n_Q(t)}{(1 + \mu v(t)) + n_I(t)}\right)}$$

- Signaali-kohina-suhde SNR (signal-to-noise-ratio)

$$SNR_r = \frac{\frac{A_c^2}{T} \int_0^T |1 + \mu v(t)|^2 dt}{E\{|n_I(t) - j n_Q(t)|^2\}} \sim \frac{A_c^2}{N_0}$$

11.12.2007

24

AM amplitudimodulaatio ja kohina

- Jos $SNR \gg 1$

$$\sqrt{(A_c(1 + \mu v(t)) + n_I(t))^2 + n_Q(t)^2} \approx A_c(1 + \mu v(t)) + n_I(t)$$

Verhokäyrän havaitsemisen jälkeen signaali kohina suhde on siis

$$SNR_d = \frac{\frac{A_c^2}{T} \int_0^T |1 + \mu v(t)|^2 dt}{E\{n_I(t)\}} \approx 2SNR_r \quad \text{Kohina suodattuu.}$$

- Jos $SNR \ll 1$

$|y_I(t)| \approx \left(\sqrt{n_I^2(t) + n_Q^2(t)} + A_c(1 + \mu v(t)) \right)$ Kohinan ja signaalin osat vaihtuvat.

$$SNR_d = SNR_r \quad \text{Rayleigh jakautunut satunnaisuus}$$

Verhokäyrän havaitsin seuraa lähinnä kohinaa.

11.12.2007

25

Vaihe- ja taajuusmodulaatio

- Vaihemodulaatio (PM, phase modulation)

$$x(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi_0 v(t)) = \text{Re}\{e^{i\phi_c(t)}\}$$

$$\phi_c(t) = 2\pi f_c t + \phi_0 v(t)$$

$$0 < \phi_0 \leq \frac{\pi}{2}, \quad |v(t)| < 1$$

- Kulman muutosnopeus ja hetkellinen taajuus

$$2\pi f(t) = \frac{d}{dt} \phi_c(t) = 2\pi f_c + \phi_0 \frac{d}{dt} v(t)$$

- Taajuus modulaatio

$$f(t) = f_c + f_0 v(t)$$

$$0 < f_0 < f_c$$

$$2\pi f(t) = 2\pi f_c + \frac{d}{dt} \phi_c(t) \Rightarrow \phi_c(t) = 2\pi f(t - t_0) + \int_{t_0}^t f_0 v(\tau) d\tau$$

11.12.2007

26

Vaihe- ja taajuusmodulaatio

- Vaihemodulaatio

$$2\pi f(t) = \frac{d}{dt} \phi_c(t) = 2\pi f_c + \phi_0 \frac{d}{dt} v(t)$$

- Taajuus vaihtelee rajusti jos moduloitava signaali on epäjatkua tai sisältää kohinaa.

- Taajuusmodulaatio

$$\phi_c(t) = 2\pi \left(f_c(t-t_0) + f_0 \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \right) \quad \left| \int_{t_0}^{\infty} v(t) dt \right| < \infty$$

- Integraali kasvaa rajatta jos moduloitava signaali sisältää dc-komponentin

- Moduloidun signaalin amplitudi on riippumaton $v(t)$:stä
=> Moduloidun signaalin energia (lähes) riippumaton $v(t)$:stä!
- Tehospektriä ei voida ratkaista analyttisesti yleisessä tapauksessa.

11.12.2007

27

Vaihe- ja taajuusmodulaatio

- Moduloidun signaali voidaan jakaa I ja Q haaroihin

$$x(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) = \underbrace{\cos \phi(t)}_{x_I(t)} \cos(2\pi f_c t) + \underbrace{\sin \phi(t)}_{x_Q(t)} \sin(2\pi f_c t)$$

- Tarkastellaan kapeakaistaista signaalia $|\phi(t)| < 1$

$$x_I(t) = \cos \phi(t) = 1 - \frac{1}{2!} \phi^2(t) + \dots \approx 1$$

$$x_Q(t) = \sin \phi(t) = \phi(t) - \frac{1}{3!} \phi^3(t) + \dots \approx \phi(t)$$

$$x(t) \approx \cos(2\pi f_c t) + \phi(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$X(f) \approx \frac{1}{2} \left(V(f-f_c) e^{-i\frac{\pi}{2}} + \delta(f-f_c) + V(f+f_c) e^{i\frac{\pi}{2}} + \delta(f+f_c) \right)$$

Tehospektri (lähes) sama kuin AM modulaation tapauksessa

11.12.2007

28

Vaihe- ja taajuusmodulaatio

- Mielivaltaista funktiota voidaan approksimoida summana sini- ja kosini-termejä (Fourier-sarja).
- Tone-modulaatio:

$$v(t) = \begin{cases} A \cos 2\pi f_m t & \text{PM} \\ A \sin 2\pi f_m t & \text{FM} \end{cases} \Rightarrow \phi(t) = \beta \sin 2\pi f_m t, \beta = \begin{cases} A\phi_0 & \text{PM} \\ \frac{A f_0}{f_m} & \text{FM} \end{cases}$$

Modulaatioindeksi

$$x(t) = \underbrace{\cos(\beta \sin(2\pi f_m t))}_{x_I(t)} \cos(2\pi f_c t) + \underbrace{\sin(\beta \sin(2\pi f_m t))}_{x_Q(t)} \sin(2\pi f_c t)$$

- Tone-modulaation Fourier-sarja esitys

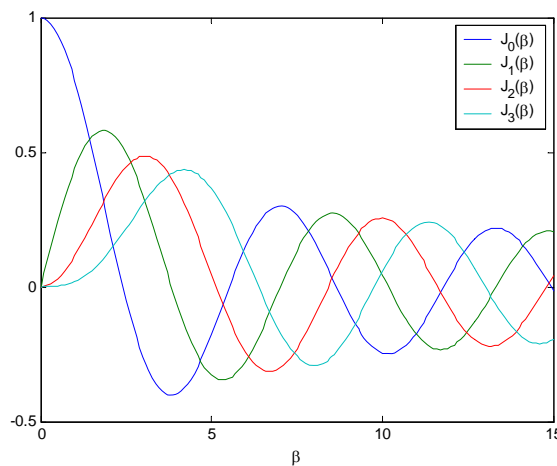
$$x_I(t) = \cos(\beta \sin(2\pi f_m t)) = J_0(\beta) + \sum_{k=1}^{\infty} 2J_{2k}(\beta) \cos(2\pi(2k)f_m t)$$

$$x_Q(t) = \sin(\beta \sin(2\pi f_m t)) = \sum_{k=0}^{\infty} 2J_{2k+1}(\beta) \cos(2\pi(2k+1)f_m t)$$

11.12.2007

29

1. tyyppinen Besselin funktio



$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\beta \sin \lambda - n\lambda)} d\lambda$$

$$J_n(\beta) = -J_{-n}(\beta)$$

on differentiaaliyhtälön

$$x^2(\beta) \frac{d^2 y(\beta)}{d\beta^2} + x(\beta) \frac{dy(\beta)}{d\beta}$$

$$+ (x^2(\beta) - n^2) y(\beta) = 0$$

ratkaisu

11.12.2007

30

Vaihe- ja taajuusmodulaatio

- Kantoaalto, perustaajuuden komponentti plus harmoniset yliaallot $f_c + kf_m$

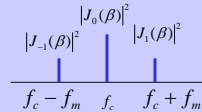
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \sin(2\pi(f_c + kf_m)t)$$

$$X(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \left(\delta(f - f_c - kf_m) e^{-j\frac{\pi}{2}} + \delta(f + f_c + kf_m) e^{+j\frac{\pi}{2}} \right)$$

- Jos $\beta \ll 1$ informaatio siirtyy pääasiassa kahdella taajuuskomponentilla

$$X(f) \approx \frac{1}{2} \sum_{k=-1}^1 J_k(\beta) \left(\delta(f - f_c - kf_m) e^{j\frac{\pi}{2}} + \delta(f + f_c + kf_m) e^{-j\frac{\pi}{2}} \right)$$

- Jos β on suuri, niin signaalin spektri leviää



11.12.2007

31

Vaihe- ja taajuusmodulaatio

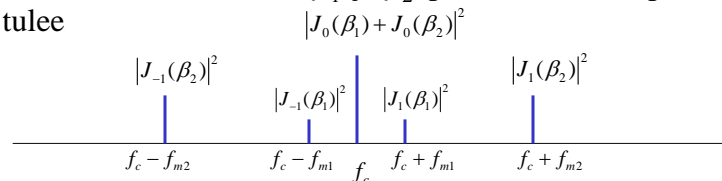
- Useita komponentteja (multi-tone modulation)

$$v(t) = A_1 \cos(2\pi f_{m1}t) + A_2 \cos(2\pi f_{m2}t)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_k(\beta_1) J_l(\beta_2) \sin(2\pi(f_c + kf_{m1} + lf_{m2})t)$$

$$X(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_k(\beta_1) J_l(\beta_2) \left(\delta(f - f_c - kf_{m1} - lf_{m2}) e^{j\frac{\pi}{2}} + \delta(f + f_c + kf_{m1} + lf_{m2}) e^{-j\frac{\pi}{2}} \right)$$

- Jos modulaatio indeksit β_1 ja β_2 pieniä, niin tehospektriiksi tulee



Taajuuskaista levenee verrattuna amplitudimodulaatioon.

11.12.2007

32

Vaihe- ja taajuusmodulaatio

Johtopäätös: Yleisessä tapauksessa FM ja PM modulaatio levittävät signaalin äärettömän suurelle taajuuskaistalle.

- Käytännön signaaleille taajuuskomponentit pienenevät nopeasti taajuuden kasvaessa. => Jos kaista valitaan riittävän suureksi, signaalin vääristymä suodatuksesta johtuen on pientä.

– Merkittävien taajuuskomponenttien määrä

$$M = \arg \max_k \{ |J_k(\beta)| > \varepsilon \} \quad 0.01 < \varepsilon < 0.1$$

– Kaistanleveys

$$B = 2Mf_m$$

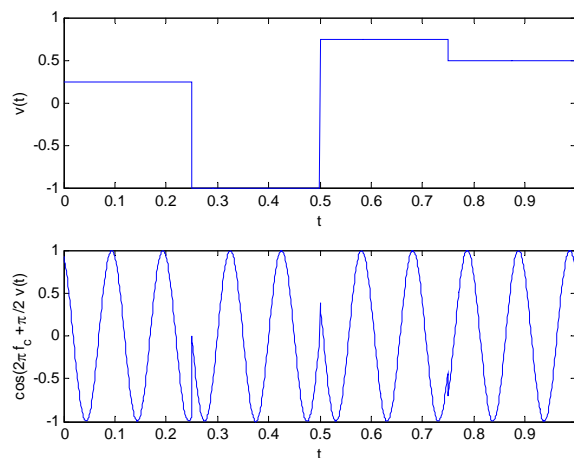
– FM modulaatio

$$\beta = \frac{Af_0}{f_m} \quad A \leq 1, f_m \leq 1 \quad M \approx \beta + 2 \quad B \approx 2 \left(\frac{Af_0}{f_m} + 2 \right) f_m \approx 2(f_0 + 2f_m)$$

11.12.2007

33

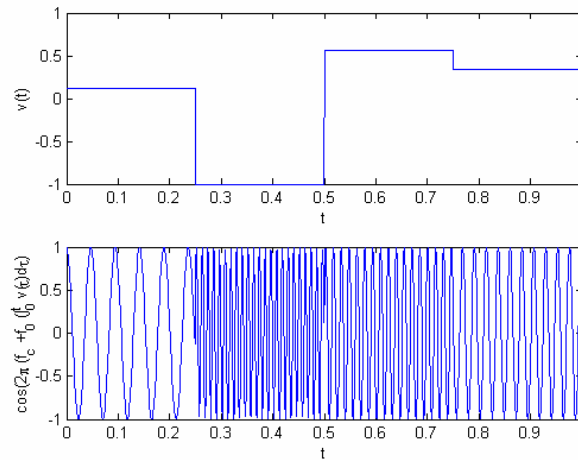
Vaihemodulaatio



11.12.2007

34

Taajuusmodulaatio



11.12.2007

35

Vaihe- ja taajuus modulaatio

- Vastaanotto:

- FM muutetaan AM:ksi derivoimalla

$$x(t) = \cos(\phi_c(t))$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left(\frac{d}{dt}\phi_c(t) \right) \sin(\phi_c(t)) = \underline{2\pi(f_c + f_0 v(t)) \sin(\phi_c(t))}$$

$$\phi_c(t) = 2\pi \left(f_c(t - t_0) + f_0 \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \right)$$

$$\frac{d}{dt}\phi_c(t) = 2\pi(f_c + f_0 v(t)) \approx \frac{\phi_c(t) - \phi_c(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad \Delta t \ll 1$$

- Derivoitu FM moduloitu signaali voidaan nyt löytää verhoikäyrän havaittajalla.

11.12.2007

36

Vaihe- ja taajuus modulaatio

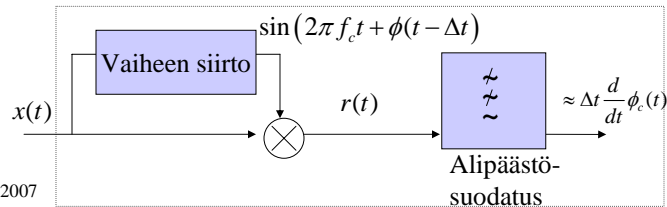
- Vaihe-eroon perustuva havaitseminen:

$$\phi_c(t) - \phi_c(t - \Delta t) \approx \Delta t \frac{d}{dt} \phi_c(t) = 2\pi (f_c + f_0 v(t)) \Delta t$$

$$r(t) = \underbrace{\cos(2\pi f_c t + \phi(t))}_{x(t)} \sin(2\pi f_c t + \phi(t - \Delta t))$$

$$= \frac{1}{2} (\sin(\phi(t) - \phi(t - \Delta t)) + \sin(4\pi f_c t + \phi(t) + \phi(t - \Delta t)))$$

$$\approx \phi(t) - \phi(t - \Delta t) + \sin(4\pi f_c t + \phi(t) + \phi(t - \Delta t))$$

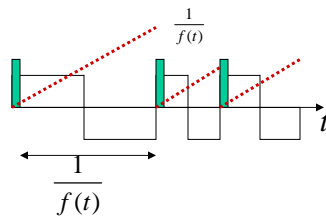
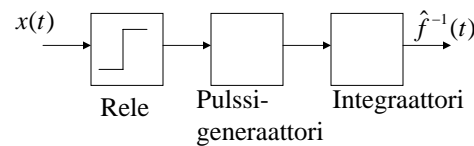


11.12.2007

37

Vaihe- ja taajuus modulaatio

- Taajuuteen perustuva havaitseminen: Signaalin taajuus voidaan estimoida sen perusteella kuinka monta kertaa se menee nollan kautta (zero crossing)



11.12.2007

38

Vaihemodulaatio ja kohina

- Vastaanotettu signaali, ennen havaitsemista

$$y(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_0 v(t)) + z(t)$$

$$z(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{n_I^2(t) + n_Q^2(t)} e^{i\theta(t)} e^{i2\pi f_c t} \right\} = A_z(t) \cos(2\pi f_c t + \theta(t))$$

$A_z(t)$ Reyleigh jakautunut

$\theta(t)$ Tasajakautunut

- Ekvivalentti alipäästösignaali

$$y_I(t) = A_c e^{i\phi(t)} + A_z(t) e^{i\theta(t)}$$

$$A_c A_z(t) \cos \phi(t) \cos \theta(t) - A_c A_z(t) \sin \phi(t) \sin \theta(t)$$

$$+ i A_c A_z(t) (\cos \phi(t) \sin \theta(t) + \sin \phi(t) \cos \theta(t)) = A_v(t) e^{i\phi_v(t)}$$

$$\phi_v(t) = \phi(t) + \arctan \left(\frac{\sin(\theta(t) - \phi(t))}{\frac{A_c}{A_z(t)} + \cos(\theta(t) - \phi(t))} \right)$$

11.12.2007

39

Vaihemodulaatio ja kohina

- Kantoaalto-kohina-suhde CNR (carrier-to-noise-ratio)

$$CNR_r = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt}{E\{|z(t)|^2\}} = \frac{\frac{A_c^2}{2}}{\frac{1}{2} N_0} = \frac{A_c^2}{N_0}$$

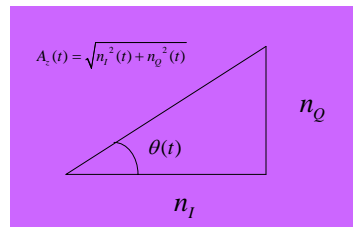
- $CNR \gg 1$

$$\phi_v(t) = \phi(t) + \arctan \left(\frac{\sin(\theta(t) - \phi(t))}{\frac{A_c}{A_z(t)} + \cos(\theta(t) - \phi(t))} \right)$$

$$\approx \phi(t) + \frac{\sin(\theta(t) - \phi(t))}{\frac{A_c}{A_z(t)}} \leftarrow \arctan(x) \approx x, \quad x \ll 1$$

$$\approx \phi(t) + \frac{A_z(t)}{A_c} \sin(\theta(t)) = \phi(t) + \frac{1}{A_c} n_Q(t)$$

$\theta(t) - \phi(t)$ on tasajakautunutta, joten $\sin(\theta(t) - \phi(t)) = \sin(\theta(t))$ omaa samat tilastolliset ominaisuudet



11.12.2007

40

Vaihemodulaatio ja kohina

- Signaali-kohina-suhde

$$\phi_i(t) \approx \phi(t) + \frac{1}{A_c} n_Q(t) = \phi_0 v(t) + \frac{1}{A_c} n_Q(t)$$
$$SNR_d \approx \frac{2(\phi_0 A_c)^2}{N_0} \text{ Kohina suodattuu.}$$

- $CNR \ll 1$

$$\phi_i(t) = \phi(t) + \arctan \left(\frac{\sin(\theta(t) - \phi(t))}{\frac{A_c}{A_c(t)} + \cos(\theta(t) - \phi(t))} \right)$$
$$\approx \phi(t) + \arctan(\tan(\theta(t) - \phi(t))) \approx \phi(t) + \theta(t)$$

**Vaihe on lähinnä kohinan määrittämää.
Signaali hukkuu kohinaan.**

11.12.2007

41

Digitaalinen modulaatio

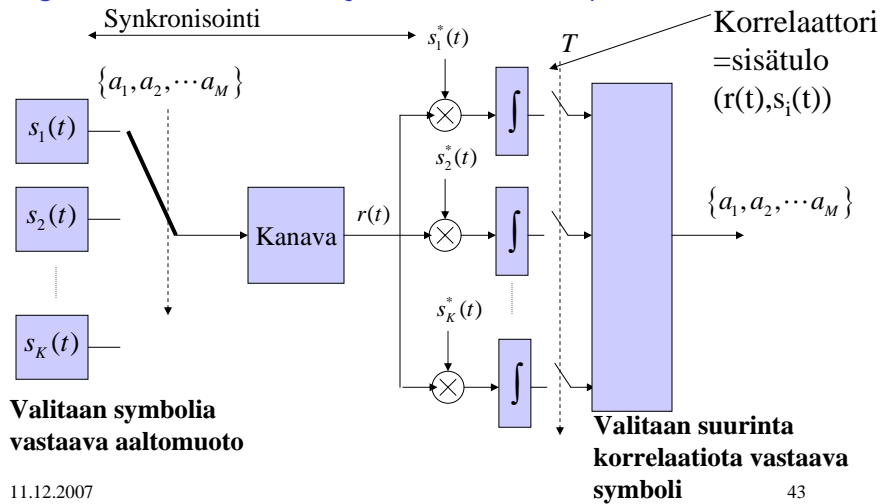
- Olkoon $\{a_n\}$ informaatio sekvenssi (bittijono)
- Olkoon $S = \{s_k(t)\}$, $|S| = K$ mahdollisten T :n pituisten aaltomuotojen (signaalien) joukko
- Tarkastellaan M :n bitin kuvaamista jatkuva-aikaiseksi signaaliksi eli modulointia.
 - $M = \log_2 K$ bitin symboli voidaan esittää aina yhdellä aalto muodolla. Tällöin numeronopeudeksi tulee $R = M/T$.
- Koherentti modulaatio: Modulaattori ohjaa suoraan signaalin vaihetta.
- Epäkoherentti modulaatio: Modulaattori ohjaa signaalin taajuutta.
- Koherentti vastaanotto: Vastaanotetun signaalin vaihe tunnetaan.
- Epäkoherentti vastaanotto: Signaalin vaihetta ei tunneta.

11.12.2007

42

Digitaalinen modulaatio

Digitaalisen moduloinnin ja demoduloinnin periaate

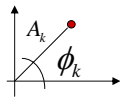


11.12.2007

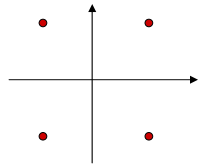
Digitaalinen modulaatio

- Olkoon aaltomuodot muotoa

$$s_k(t) = A_k g(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_k) = \text{Re} \{ A_k e^{i\phi_k} g(t) e^{i2\pi f_c t} \}$$
 Tällöin yksittäistä symboli voidaan esittää pisteenä (I,Q) -tasossa



- Modulointimenetelmän konstitaatio on kaikki mahdolliset signaalit (I,Q) -tasossa.



11.12.2007

44

PAM-modulointi

PAM Pulse Amplitude Modulation

$$s_k(t) = A_k g(t) \cos(2\pi f_c t) = \operatorname{Re}\{A_k g(t) e^{i2\pi f_c t}\}$$

$$s_{-k}(t) = -s_k(t)$$

$$- g(t) \text{ on kantafunktio, esim. pulssi } g(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$

– A_k kuvaa k :nnen symbolin aaltomuodon amplitudiksi

– Aaltomuodon energia

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^T |A_k g(t)|^2 dt = \frac{1}{2} A_k^2 E_g$$

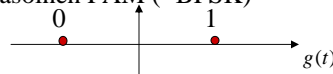
11.12.2007

45

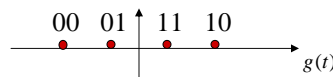
PAM-modulointi

- PAM moduloinnin signaali konstillaatio

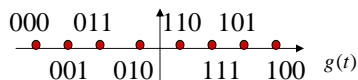
2. Tasoinen PAM (=BPSK)



4. Tasoinen PAM



8. Tasoinen PAM



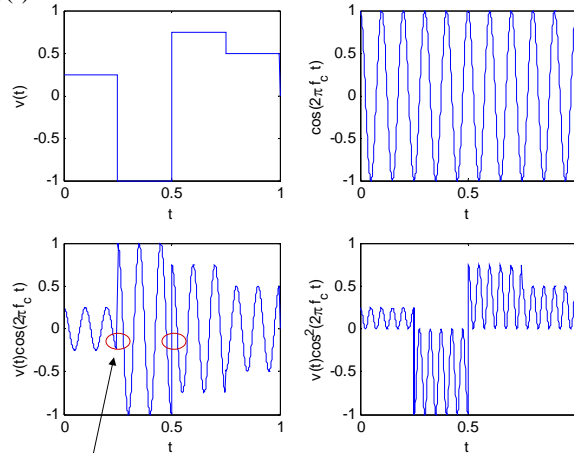
- Kohinan takia signaalimuotoja voidaan tulkita vastaanottimessa toisiksi. Bittivirhetodennäköisyyden minimoimiseksi vierekkäisten signaalien bittien tulisi poiketa toisistaan vain yhdellä bitillä (Gray encoding).

11.12.2007

46

PAM-modulaatio

$$v(t) = A_k g(t)$$



Vaihe muuttuu 180°

11.12.2007

47

PSK-modulaatio

PSK Phase Shift Keying

$$s_k(t) = g(t) \cos\left(2\pi\left(f_c t + \frac{(k-1)}{K}\right)\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left\{g(t)e^{i2\pi\frac{(k-1)}{K}}e^{i2\pi f_c t}\right\}, \quad k=1,2,\dots,K$$

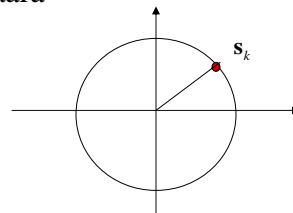
$$= g(t) \cos\left(2\pi\frac{(k-1)}{K}\right) \cos(2\pi f_c t) - g(t) \sin\left(2\pi\frac{(k-1)}{K}\right) \sin(2\pi f_c t)$$

I-haara

Q-haara

- Ekvivalentti alipäästösignaali

$$s_{I,k}(t) = g(t)e^{i2\pi\frac{(k-1)}{K}}$$



11.12.2007

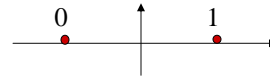
48

PSK-modulaatio

- BPSK Binary PSK

$$s(t) = g(t) \cos\left(2\pi\left(f_c t + \frac{(k-1)}{2}\right)\right) = \cos(\pi(k-1))g(t) \cos(2\pi f_c t)$$

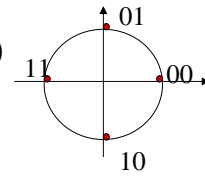
– Sama kuin kaksi tasoinene PSK



- QPSK Quadrature PSK

$$s(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(k-1)\right)g(t) \cos(2\pi f_c t) - \sin\left(\frac{\pi}{2}(k-1)\right) \sin(2\pi f_c t)$$

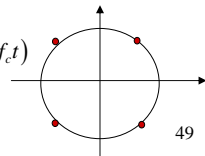
$k = 1, 2, 3, 4$



tai

$$s(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(2k-1)\right)g(t) \cos(2\pi f_c t) - \sin\left(\frac{\pi}{4}(2k-1)\right) \sin(2\pi f_c t)$$

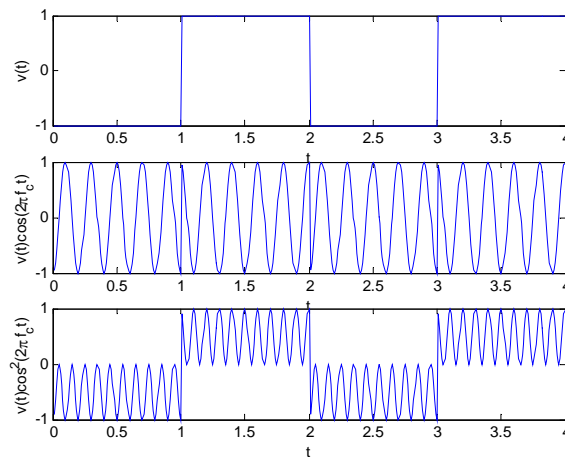
$k = 1, 2, 3, 4$



11.12.2007

PSK-modulaatio

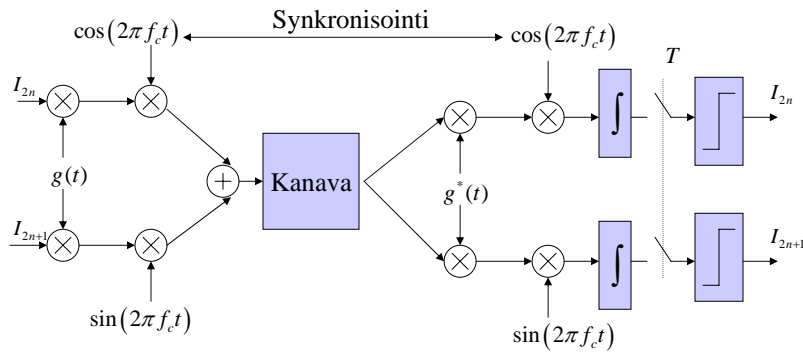
- BPSK



11.12.2007

50

QPSK-modulaatio



$$I_n = \begin{cases} -1 & a_n = 1 \\ 1 & a_n = 0 \end{cases} \quad s(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(2k-1)\right)g(t)\cos(2\pi f_c t) - \sin\left(\frac{\pi}{4}(2k-1)\right)\sin(2\pi f_c t)$$

$$= I_{2n} \cos(2\pi f_c t) + I_{2n+1} \sin(2\pi f_c t)$$

11.12.2007

51

QAM-modulaatio

QAM Quadrature Amplitude Modulation Neliöllinen QAM (M=16)

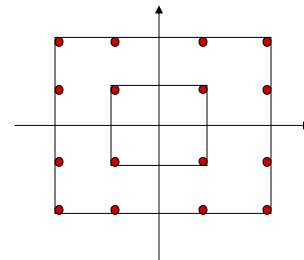
$$s_k(t) = A_{I,k}g(t)\cos(2\pi f_c t) - A_{Q,k}g(t)\sin(2\pi f_c t)$$

$$= V_k \cos(2\pi f_c t + \theta_k)$$

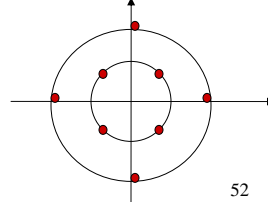
$$V_k = \sqrt{A_{I,k}^2 + A_{Q,k}^2}, \quad \theta_k = \arctan \frac{A_{Q,k}}{A_{I,k}}$$

- Ekvivalentti alipäästösignaali

$$s_{I,k}(t) = V_k e^{i\theta_k} g(t)$$



Yhdistetty PAM-PSK (M=8)



11.12.2007

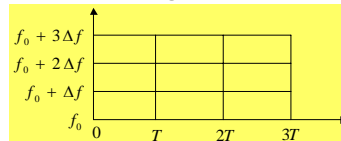
52

Multidimensionaaliset signaalit

- Vaihetta ja amplitudimoduloimalla voidaan toteuttaa kaksidimensionoinen signaaliavaruus

$$s_k(t) = A_{I,k} \underbrace{g(t) \cos(2\pi f_c t)}_{g_1(t)} - A_{Q,k} \underbrace{g(t) \sin(2\pi f_c t)}_{g_2(t)}$$

- $g_1(t)$ ja $g_2(t)$ muodostavat ortogonaalisen kannan
- N-dimensionoinen signaaliavaruus voidaan toteuttaa N:llä ortogonaalilla funktiolla. Esim.
 - Jaetaan aika N:ään aikaväliin, joka ajanhetki lähetetään yksidimensionoinen signaali (PAM/ BPSK)
 - Jaetaan taajuuskaista N:ään taajuuskaistaan ja lähetetään yksidimensionoinen signaali kullakin taajuuskaistalla.



11.12.2007

53

Multidimensionaaliset signaalit

- Multidimensionaalisia signaaleja voidaan käyttää monikäyttö tekniikoiden (Multiple Access) toteuttamiseen.
- TDMA: Jaetaan aika N:ään aikaväliin, joka ajanhetki lähetetään yksittäiselle käyttäjälle.
- Ideaalinen CDMA: Valitaan N:n ortogonaalia kantafunktiota samalta taajuuskaistalta. Jokaisella käyttäjällä oma kantafunktio.
- FDMA: Valitaan N:n ortogonaalia kantafunktiota, siten että funktiot ovat eri taajuuskaistoilla.

11.12.2007

54

FSK-modulaatio

FSK Frequency shift keying

$$s_k(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi(f_c + (k-1)\Delta f)t), \quad k=1,2,\dots,K, \quad 0 \leq t \leq T$$

- Ekvivalentti alipäästösignaali

$$s_{l,k}(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} g(t) e^{i2\pi(k-1)\Delta f t}$$

- Ristikorrelaatio tekijä (Cross correlation coefficient)

$$\rho_{l,kl} = \frac{\int_0^T s_{l,k}(t) s_{l,l}^*(t) dt}{\sqrt{\int_0^T s_{l,k}(t) s_{l,k}^*(t) dt} \sqrt{\int_0^T s_{l,l}(t) s_{l,l}^*(t) dt}} = \frac{2E}{2E} \int_0^T e^{i2\pi(k-l)\Delta f t} dt$$

$$= \text{sinc}((k-l)\Delta f T) e^{i2\pi(k-l)\Delta f T}$$

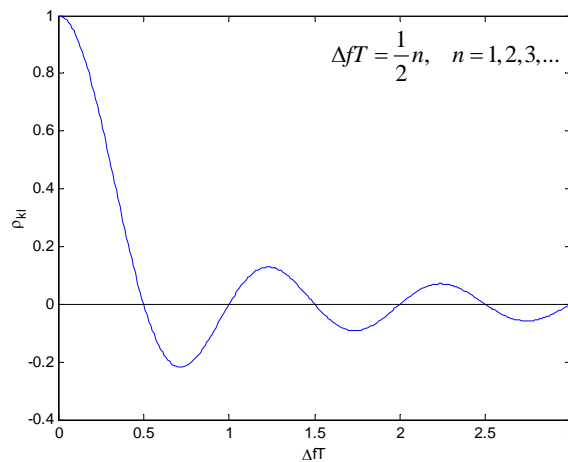
$$\rho_{kl} = \text{Re}\{\rho_{l,kl}\} = \frac{\sin(\pi(k-l)\Delta f T) \cos(\pi(k-l)\Delta f T)}{\pi(k-l)\Delta f T}$$

11.12.2007

55

FSK-modulaatio

- FSK:ssa kanavien välit Δf valittava siten, että eri aaltomuodot pysyvät ortogonaaleina.

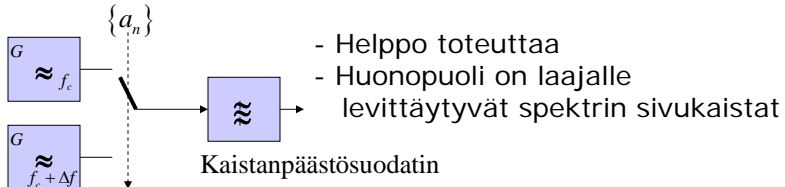


11.12.2007

56

FSK-modulaatio

- Kova-avainnus: FSK toteutetaan kytkimellä ja eritaajuisilla oskillaattoreilla



- Pehmeä avainnus: FSK toteutetaan oskillaatorilla jonka taajuutta voidaan säätää.
 - Paremmat spektriominaisuudet kuin kovalla avainnuksella
 - Yleisesti käytössä

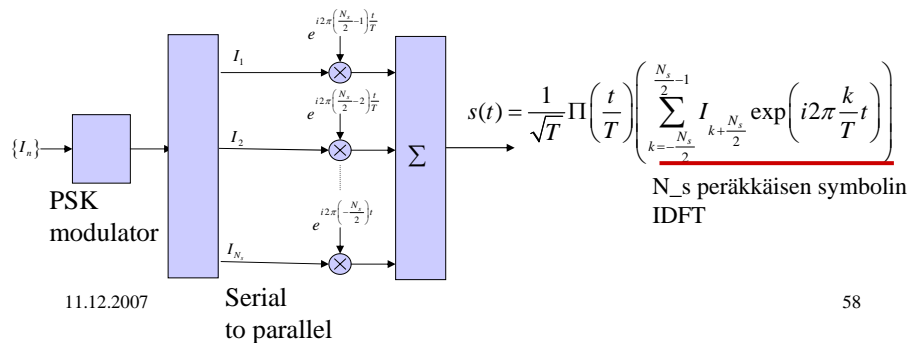
11.12.2007

57

OFDM

Orthogonal Frequency Division Multiplexing

- Symbolin pituus T on suhteellisen pitkä => Kaistanleveys on kapea
- N_s (parillinen) symbolia lähetetään rinnan siten, että kanta-aallon-taajuuksudet ovat $1/T$ päässä toisistaan

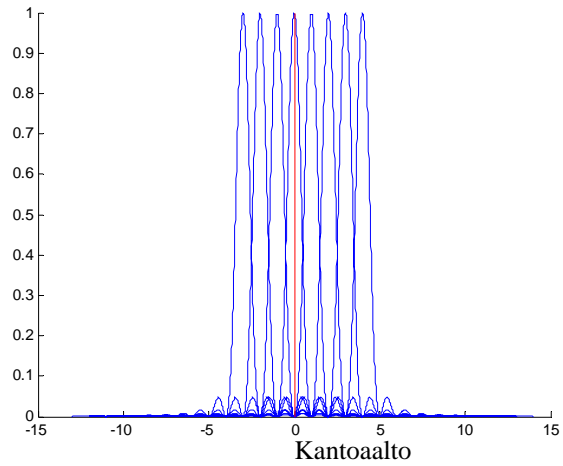


11.12.2007

58

OFDM

Spektritiheys kun $N_s = 8$

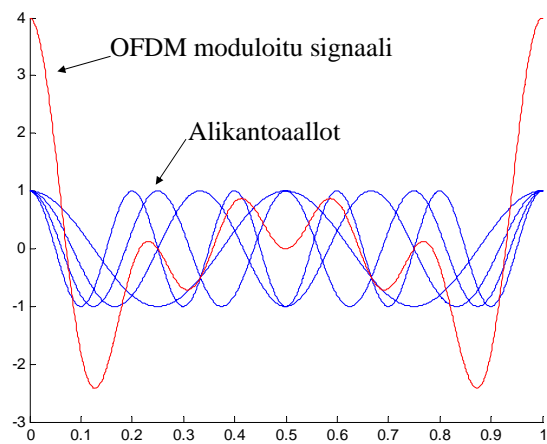


11.12.2007

59

OFDM

$N_s = 4$
 $f_c = 4 \text{ Hz}$



11.12.2007

60

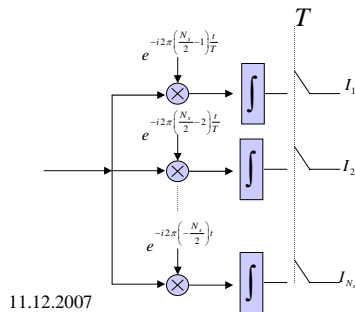
OFDM

- Alikanavat ovat keskenään ortogonaalisia

$$\left(\frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \exp\left(i2\pi \frac{k}{T} t\right) \middle| \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \exp\left(i2\pi \frac{l}{T} t\right) \right) = \frac{1}{T} \int_0^T \exp\left(i2\pi \frac{k-l}{T} t\right) dt, \quad k \neq l$$

$$= \frac{1}{i2\pi(k-l)} (\exp(i2\pi(k-l)) - 1) = 0$$

- Vastaanotin



61

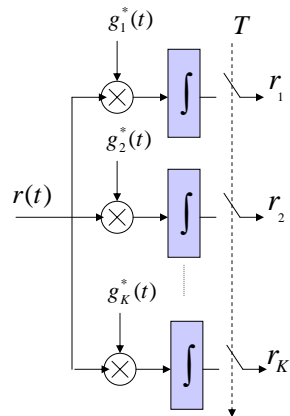
OFDM

- OFDM modulaattori voidaan toteuttaa käyttäen käännteistä nopeaa Fourier-muunnosta (IDFT) ja Digitaal-Analogia D/A muunninta.
- Vastaanotin voidaan toteuttaa näytteistuksen jälkeen käyttäen nopeaa Fourier-muunnosta (FFT)
- Difitaalinen signaalin käsittely on halpaa – erillisiä oskillaattoreita ei tarvita jokaista alikanavaa kohden.

11.12.2007

62

Korrelaatio demodulaattori



- Korrelaattorin ulostulo

$$r_i = (r(t), g_i(t)) = \int_0^T r(t) g_i^*(t) dt = s_{ki} + n_i$$

- Signaali-kohinasuhde

$$SNR = \frac{s_{ki}^2}{E\{n_i^2\}} = 2 \frac{s_{ki}^2}{N_0}$$

- Jos

$$s_k(t) = \sqrt{E} g_k(t)$$

$$SNR = \frac{s_{kk}^2}{E\{n_i^2\}} = 2 \frac{E}{N_0}$$

Korrelaattori laskee vastaanotetun signaalin ja tunnettujen aaltomuotojen välisen sisätulon

11.12.2007

63

Optimaalinen päätössääntö

- Gaussinen kanava.

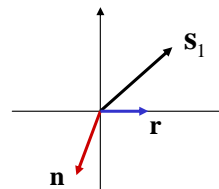
$$s_k(t) = \sum_{l=1}^K s_{kl} g_l(t) \quad \text{lähetetty signaali}$$

$$r_i = \int_0^T r(t) g_i^*(t) dt = \int_0^T (s_k(t) + n(t)) g_i^*(t) dt = s_{ki} + n_i \quad \text{vastaanotettu signaali}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}_k + \mathbf{n} \quad \text{Kanavan vektori malli}$$

- Ehdollinen jakauma

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_k) = \frac{1}{(\pi N_0)^K} e^{-\frac{\sum_{i=1}^K (r_i - s_{ki})^2}{N_0}}$$



11.12.2007

64

Optimaalinen päätössääntö

- MAP (Maximum a posteriori probability) päätössääntö: Tarkastellaan todennäköisyyttä, että $s_k(t)$ lähetettiin kun korrelaattorin ulostulo on $\mathbf{r} = (r_i)$.

$$\Pr(\mathbf{s}_k \text{ lähetettiin} | \mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_k) \Pr\{\mathbf{s}_k\}}{p(\mathbf{r})} \quad \text{Bayesin teoreema}$$

$p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_k)$ \mathbf{r} :n todennäköisyysjakauma ehdolla $s_k(t)$ lähetettiin.

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^M p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_k) \Pr\{\mathbf{s}_k\} \quad \mathbf{r}:n \text{ todennäköisyysjakauma}$$

$\Pr\{\mathbf{s}_k\}$ s_k :n a priori todennäköisyys.

- Aaltomuotojen apriori todennäköisyydet $\Pr\{\mathbf{s}_k\}$ riippuvat käytetystä (johto)koodaus menetelmästä. Jos symbolit yhtätodennäköisiä niin $\Pr\{\mathbf{s}_k\} = \frac{1}{M} \forall k$

11.12.2007

65

Optimaalinen päätössääntö

- Metriikka

$$\Pr(\mathbf{s}_k \text{ lähetettiin} | \mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_k) \Pr\{\mathbf{s}_k\}}{p(\mathbf{r})}$$

$$\ln \Pr(\mathbf{s}_k \text{ lähetettiin} | \mathbf{r}) = \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_k) = -\frac{K}{2} \ln(\pi N_0) - \frac{1}{N_0} \sum_{l=1}^K (r_l - s_{kl})^2 + \ln \Pr\{\mathbf{s}_k\} - \ln p(\mathbf{r})$$

Vain suhteellisella arvolla on väliä, joten ne osat jotka ovat kaikille samat voidaan unohtaa.

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k) = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_k\|^2 = \sum_{l=1}^K (r_l - s_{kl})^2 \quad \text{Euklidinen etäisyys}$$

$$D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k) = -2\mathbf{r}^T \mathbf{s}_k + \|\mathbf{s}_k\|^2 \quad \text{Etäisyys metriikka}$$

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k) = 2 \int_0^T r(t) s_k^*(t) dt - E_k = 2\mathbf{r}^T \mathbf{s}_k - \|\mathbf{s}_k\|^2 \quad \text{Korrelaatio metriikka}$$

$$C'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k) = \int_0^T r(t) s_k^*(t) dt = \mathbf{r}^T \mathbf{s}_k$$

11.12.2007

66

Optimaalinen päätössääntö

- Oletetaan, että $s_k(t)$ lähetettiin.
- Virheellisen päätöksen todennäköisyys.

$$\Pr\{\text{virhe} | s_k \text{ lähetettiin}\} = 1 - \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M \Pr\{D(\mathbf{r}, s_k) > D(\mathbf{r}, s_l)\}$$

11.12.2007

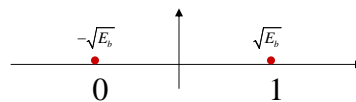
67

BPSK-modulaatio

- BPSK

$$s_1(t) = \sqrt{E_b} g(t)$$

$$s_2(t) = -\sqrt{E_b} g(t)$$



- Lähetettävä signaali

$$s(t) = \sqrt{E_b} g(t) I_n, I_n \in \{-1, 1\}$$

- Vastaanotettu signaali

$$r = \int_0^T r(t) g^*(t) dt = \int_0^T (s_k(t) + n(t)) g^*(t) dt = \begin{cases} \sqrt{E_b} + n & I_n = 1 \\ -\sqrt{E_b} + n & I_n = -1 \end{cases}$$

- Ehdolliset jakaumat

$$p(\mathbf{r} | s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(r - \sqrt{E_b})^2}{N_0}} \quad p(\mathbf{r} | s_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(r + \sqrt{E_b})^2}{N_0}}$$

11.12.2007

68

BPSK-modulaatio

- Oletetaan, että molemmat symbolit ovat yhtä todennäköisiä.

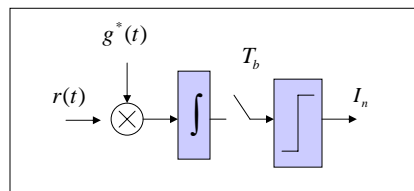
- Päätössääntö s_1

$$\ln \Pr\{s_1 \text{ lähetettiin} | \mathbf{r}\} \underset{s_2}{>} \ln \Pr\{s_2 \text{ lähetettiin} | \mathbf{r}\}$$

$$\Rightarrow (r - \sqrt{E_b})^2 \underset{s_2}{>} (r + \sqrt{E_b})^2$$

- Päätösalueiden raja

$$(r - \sqrt{E_b})^2 = (r + \sqrt{E_b})^2 \Rightarrow r = 0$$



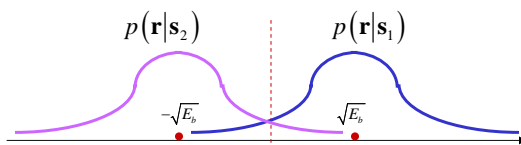
Lähetetty signaali voidaan päätellä vastaanotetun signaalin merkistä

11.12.2007

69

BPSK-modulaatio

- Virheen todennäköisyys



$$\Pr\{\text{virhe}\} = \Pr\{\text{virhe} | s_1 \text{ lähetettiin}\} \Pr\{s_1\} + \Pr\{\text{virhe} | s_2 \text{ lähetettiin}\} \Pr\{s_2\}$$

$$\Pr\{\text{virhe} | s_1 \text{ lähetettiin}\} = \Pr\{r \leq 0 | s_1\}$$

$$\Pr\{\text{virhe} | s_2 \text{ lähetettiin}\} = \Pr\{r \geq 0 | s_2\}$$

$$\Pr\{s_1\} = \Pr\{s_2\} = \frac{1}{2}$$

11.12.2007

70

BPSK-modulaatio

- Päätösvirhetodennäköisyys

$$\Pr\{r \geq 0 | s_2\} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(r+\sqrt{E_b})^2}{N_0}} dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\sqrt{2E_b}}{\sqrt{N_0}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$\Pr\{r \leq 0 | s_1\} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(r-\sqrt{E_b})^2}{N_0}} dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{\sqrt{2E_b}}{\sqrt{N_0}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\sqrt{2E_b}}{\sqrt{N_0}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_b = \Pr\{\text{virhe}\} = \Pr\{\text{virhe} | s_1 \text{ lähetettiin}\} \Pr\{s_1\} + \Pr\{\text{virhe} | s_2 \text{ lähetettiin}\} \Pr\{s_2\}$$

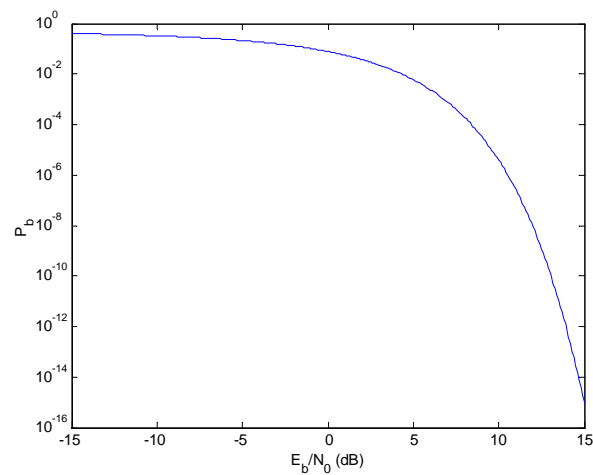
$$= \Pr\{r \geq 0 | s_2\} \frac{1}{2} + \Pr\{r \leq 0 | s_1\} \frac{1}{2} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right)$$

$$d_{12} = \|s_1 - s_2\|$$

11.12.2007

71

BPSK-modulaatio



11.12.2007

72

M-PSK

- Yleisin virhe on, että kohina muuttaa lähetetyn symbolin viereiseksi. Esim. 8-PSK:ssa 000 muuttuu symboliksi 001 tai 010.
- Yksittäisen virhetapahtuman todennäköisyyttä voidaan approksimoida BPSK:n virhetodennäköisyydellä ja koko symbolivirheen todennäköisyyttä kahden yleisimmän tapauksen perusteella

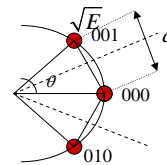
$$P_s \approx \Pr\{001|000\} + \Pr\{010|000\} \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)$$

$$d = 2\sqrt{E} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

- M-PSK:n tapauksessa

$$P_s \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{4E \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}{2N_0}}\right) = 2Q\left(\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) = 2Q\left(\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\sqrt{\frac{2KE_b}{N_0}}\right)$$

$$K = \log_2 M$$



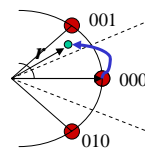
11.12.2007

73

M-PSK

- Bittivirhetodennäköisyys voidaan approksimoida symbolivirhetodennäköisyydestä: Symboli virhe todennäköisyys johtuu todennäköisimmin yksittäisen bitin virheestä.

$$P_b \approx \frac{P_s}{K} \approx \frac{2}{K} Q\left(\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\sqrt{\frac{2kE_b}{N_0}}\right)$$



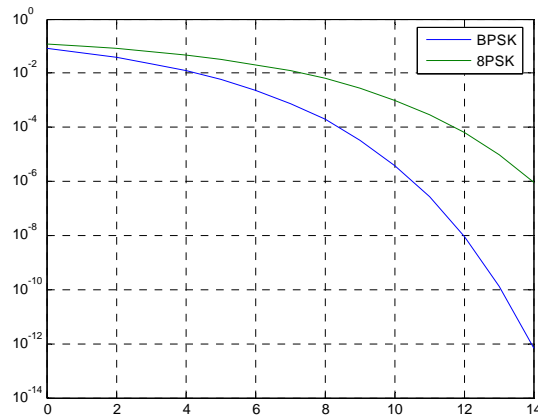
000 lähetettiin
001 vastaanotettiin

- Approximaatiot pätevät sitä paremmin mitä suurempi signaali-kohina-suhde $\frac{E_b}{N_0}$ on.

11.12.2007

74

M-PSK



11.12.2007

75

Muistillinen modulaatio

- Bitti sekvenssiä ei moduloida sellaisenaan vaan se koodataan ennen modulointia, koska
 - halutaan muokata sen spektriä paremmin kanavaan sopivaksi.
 - koodatussa signaalissa tulee olla kyllin tason muutoksia, jotta vastaanottimen kellon vaatima ajoitus voitaisiin erottaa.
 - tai halutaan, että tason muutoksia on mahdollisimman vähän, jolloin tarvittava taajuuskaista pienenee.
 - Jos kanavassa on sarjassa kapasitanseja tai muuntajakytkentöjä, ei tasavirtakomponentti pääse läpi => Valitaan koodi siten, että tasavirtakomponenttia ei synny.
 - Kooderin ja modulaattorin toteutuksen tulee olla riittävän yksinkertaista.

11.12.2007

76

Johtokoodit

- Modulaatio koodi/Johtokoodi
 - NRZ (Non-return-to-zero): Amplitudi määräytyy lähetettävästä bitistä

$$A = \begin{cases} 1 & a_n = 1 \\ -1 & a_n = 0 \end{cases}$$
 - NRZI: Amplitudi muutos vain silloin kun 1 lähetetään (differential encoding)

$$A = \begin{cases} 1 & b_n = 1 & b_n = a_n \oplus b_{n-1} \\ -1 & b_n = 0 \end{cases}$$

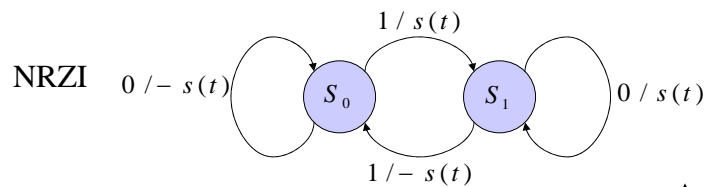
$1 \oplus 1 = 0 \quad 1 \oplus 0 = 1$
 $0 \oplus 1 = 1 \quad 0 \oplus 0 = 0$
 - RZ (Return-to-zero): 1 kuvataan amplitudi muutokseksi, 0 vakio signaaliksi. Eli, yhden bitin esittämiseen käytetään kaksi symbolia joiden pituus on 1/2T.
 - Miller koodi: Kuten RZ, mutta peräkkäiset 0:t kuvataan eri merkkisillä symboleilla
 - Manchester koodi: bitti kuvataan aina transitioksi: 1 on siirtymä -1 => 1 ja 0 on siirtymä 1=>-1

11.12.2007

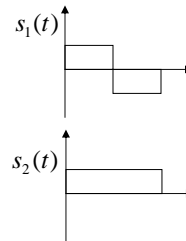
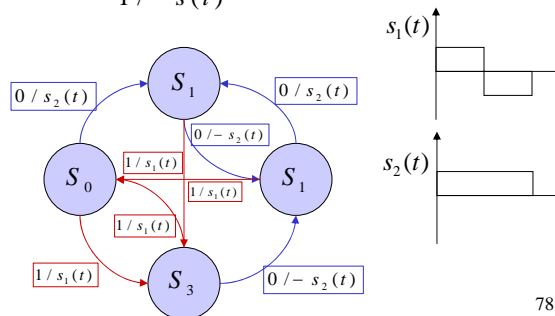
77

Johtokoodit

Tilakaaviot



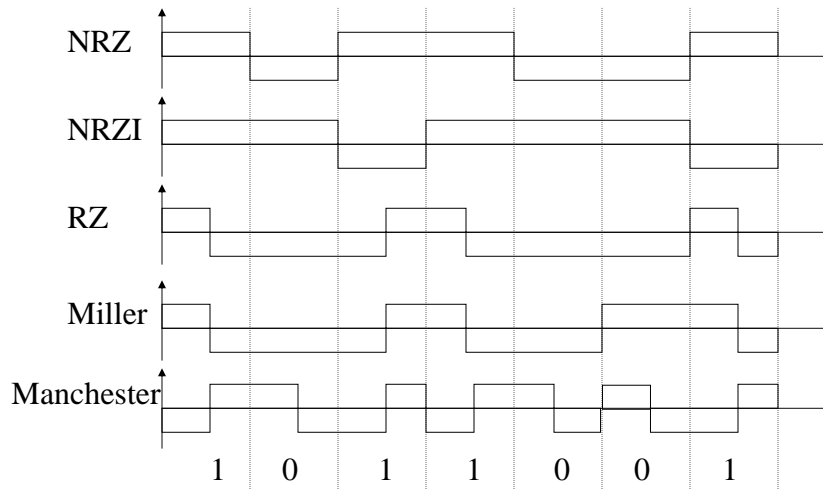
Miller koodaus



11.12.2007

78

Johtokoodit



11.12.2007

79

Differential PSK (DPSK)

- BPSK modulaatio, paitsi että bitin sijasta lähetetään kahden peräkkäisen bitin erotus

$$\theta_n = \begin{cases} 0 & a_n \oplus a_{n-1} = 1 \\ \pi & a_n \oplus a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

- Vastaanotettu ekvivalenttialipäätösignaali

$$r_{i,n} = \sqrt{E_s} e^{i(\theta_n - \phi)} + n_n$$

- Kahden perättäisen signaalin tulo riippuu vain kulman erosta, absoluuttista arvoa ei tarvitse estimoida => Epäkoherentti menetelmä (tieto vastaanotetun signaalin vaiheesta ei tarvita).

$$r_{i,n} r_{i,n-1}^* = E_s e^{i(\theta_n - \theta_{n-1})} + \sqrt{E_s} (e^{i(\theta_n - \phi)} n_{n-1}^* + e^{-i(\theta_{n-1} - \phi)} n_n) + n_n n_{n-1}^*$$

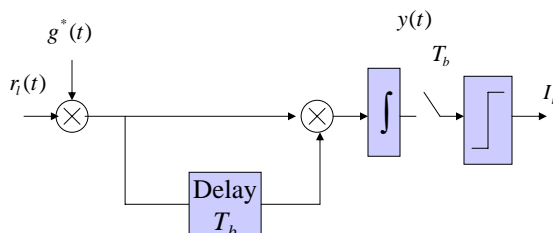
$$E \{ r_{i,n} r_{i,n-1}^* \} = E_s e^{i(\theta_n - \theta_{n-1})}$$

11.12.2007

80

DPSK

- Vastaanottimen rakenne



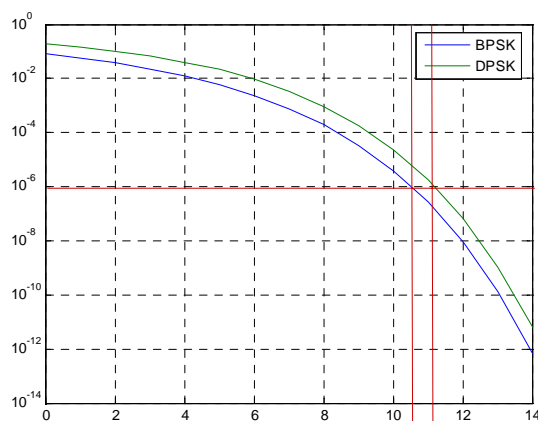
$$r_{i,n} r_{i,n-1}^* = E_s e^{i(\theta_n - \theta_{n-1})} = \begin{cases} E_s & \theta_n - \theta_{n-1} = 0 \\ -E_s & \theta_n - \theta_{n-1} = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{Kohinattomassa tapauksessa}$$

$$P_b = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right) \quad \text{Bittivirhetodennäköisyys on hivenen suurempi kuin BPSK:lla johtuen erilaisesta kohinasta}$$

11.12.2007

81

BPSK vs DPSK



Epäkoherentti vastaanotto tarvitsee suuremman signaali-kohina-suhteen saavuttaakseen saman bittivirhesuhteen kuin koherentti menetelmä $\approx 1.5 \text{ dB}$

11.12.2007

82

Modulaatio menetelmien vertailua

- PAM, QAM, PSK: Kaistan leveys riippumaton symbolien lukumäärästä

$$\frac{R}{W} = \log_2(K) \rightarrow \infty, \quad K \rightarrow \infty$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{E_s}{N_0 \log_2 K} \Rightarrow E_s \rightarrow \infty, K \rightarrow \infty$$

Jos halutaan säilyttää tietty virhetodennäköisyystaso lähetysteho kasvaa rajatta

- Ortogonaaliset aaltomuodot (FSK): Tarvittava taajuuskaista kasvaa samassa suhteessa aaltomuotojen lukumäärän K kanssa

$$W = \frac{K}{2 \log_2 K} R \rightarrow \infty, \quad K \rightarrow \infty$$

$$\frac{E_b}{N_0} > 2 \ln 2, M \rightarrow \infty$$

Mielivaltainen bittivirhetodennäköisyys saavutetaan äärellisellä energialla.

11.12.2007

83

Modulaatio menetelmien vertailua

- Kun $K=2$ ja 4 niin QAM ja PSK ovat suunnilleen yhtä hyviä bittivirhetodennäköisyyden mielessä
- Kun K kasvaa QAM:n ja PSK:n välinen bittivirhetodennäköisyyden suhde kasvaa. => Yleisesti QAM on parempi kuin PSK.

$$P_{av} = \frac{E_{av}}{T} = \frac{1}{6}(K^2 - 1)d^2 \frac{E_s}{T} \quad \mathbf{QAM}$$

$$P_{av} = \frac{E_s}{T} \quad \mathbf{QPSK}$$

- PSK on energian kulutuksen kannalta parempi

11.12.2007

84

Modulaatio menetelmien vertailua

- Koherentti vastaanotto
 - Kanavan aiheuttama vaiheen siirto pitää estimoida.
- Epäkoherentti vastaanotto
 - Vaiheensirtoa ei tarvitse estimoida, mutta saman virhetodennäköisyyden saavuttamiseen tarvitaan suurempi lähetysteho.

11.12.2007

85

Modulaatio menetelmien vertailua

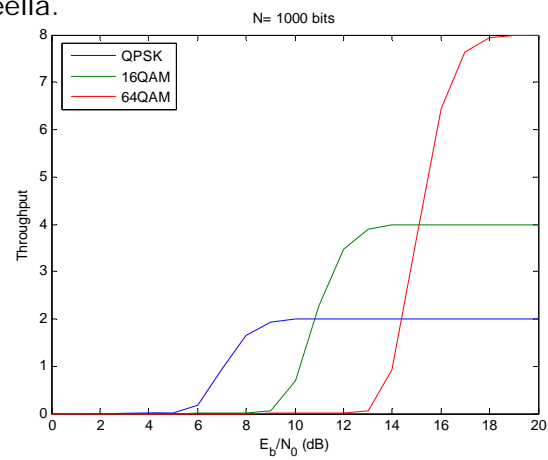
- Puhelinverkon modeemit:
 - Useita eri modulointitekniikoita nopeudesta riippuen
 - V22: QPSK
 - V90 / 56k: QAM
- IEEE 802.11b: QPSK
- WCDMA: OQPSK ja Hybrid PSK (\approx QPSK)
- HSDPA: OQPSK, 16QAM
- GSM & Bluetooth: Gaussian Minimum Shift Keying (GMSK)
- EDGE: $3\pi/8$ shifted PSK

11.12.2007

86

Modulaatio menetelmien vertailua

- Adaptiivinen modulaatio. Valitaan paras modulaatio menetelmä vastaanotetun signaali-kohina-suhteen perusteella.



11.12.2007

87