

## Luento 2

---

- Jaksollisten signaalien Fourier-sarjat
- Viivaspektri

## Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

---

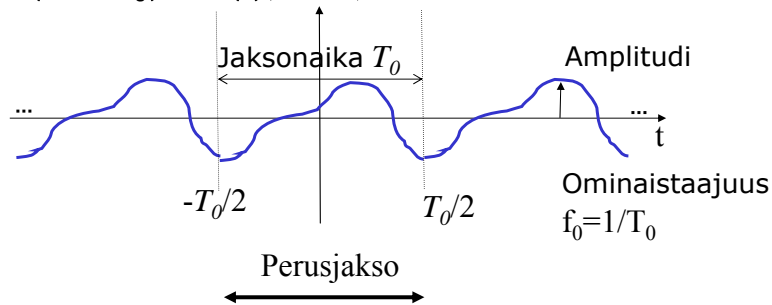
- Ranskalainen matemaatikko ja fyysikko.
- Esitti Fourier-sarjat teoksessaan *Théorie analytique de la chaleur* (Analyyttinen lämpöteoria) 1822.



<http://br.geocities.com/saladefisica3/fotos/fourier.jpg>

## Jaksolliset signaalit

- Jaksollinen (periodinen)  
 $v(t + kT_0) = v(t), t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$



Signaalin ominaisuuksien tarkastelemiseksi riittää kun keskitytään yhden jakson pituiseen aikaväliin. Valitaan yksinkertaisuuden vuoksi tarkasteluväliksi  $-T_0/2 \leq t \leq T_0/2$

## Jaksolliset signaalit

- Kahden jaksollisen signaalin sisätulo, kun molempien signaalien jaksonaika on  $T_0$  (tai  $T_0$  on niiden jaksonaikojen monikerta)

$$(v_1(t)|v_2(t)) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v_1(t)v_2^*(t)dt$$

- Keskimääräinen teho (indusoitu normi)

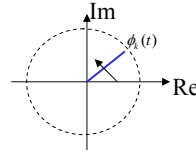
$$P \stackrel{def}{=} \langle v(t) \rangle^2 \stackrel{def}{=} (v(t)|v(t))$$

$$P = \langle |v(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |v(t)|^2 dt$$

## Ortonormaali kanta

- Tarkastellaan osoitin signaaleja

$$\phi_k(t) = \exp\left(\frac{i2\pi k}{T_0}t\right) \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$



- Osoittimen  $\phi_k(t)$  pyörimistaajuus
  - $k=0$ : 0 Hz Tasavirtakomponentti (DC)
  - $k=1$ :  $1/T_0$  Perustaajuus (1. harmoninen taajuus)
  - $k>1$ :  $k/T_0$  k. Harmoninen taajuus
- Osoittimet muodostavat ortonormaalin kannan

$$(\phi_k(t)|\phi_l(t)) = \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

## Ortonormaali kanta

- Osoitetaan, että

$$(\phi_k(t)|\phi_l(t)) = \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

- Tarkastellaan ensin tapaus  $k \neq l$

$$(\phi_k(t)|\phi_l(t)) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \exp\left(\frac{i2\pi k}{T_0}t\right) \exp\left(-\frac{i2\pi l}{T_0}t\right) dt, \quad k \neq l$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \exp\left(\frac{i2\pi(k-l)}{T_0}t\right) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \exp\left(\frac{i2\pi 0}{T_0}t\right) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} 1 dt = 1$$

## Ortonormaali kanta

- Tarkastellaan nyt tapaus  $k \neq l$

$$\begin{aligned}
 (\phi_k(t)|\phi_l(t)) &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \exp\left(\frac{i2\pi k}{T_0}t\right) \exp\left(-\frac{i2\pi l}{T_0}t\right) dt, \quad k \neq l \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \exp\left(\frac{i2\pi(k-l)}{T_0}t\right) dt = \frac{1}{i2\pi(k-l)} \exp\left(\frac{i2\pi(k-l)}{T_0}t\right) \Bigg|_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \\
 &= \frac{1}{i2\pi(k-l)} (\exp(i\pi(k-l)) - \exp(-i\pi(k-l))) \\
 &= \frac{\sin(\pi(k-l))}{\pi(k-l)} = \text{sinc}(k-l) = 0
 \end{aligned}$$

$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

S-.72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikenne Laboratorio

7

## SINC-funktio

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

- Nollakohdat

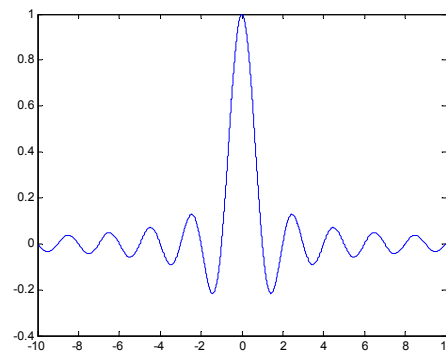
$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = 0$$

$x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

- Raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial x} \sin(\pi x)}{\frac{\partial}{\partial x} \pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \cos(\pi x)}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

Hôpital's rule



S-.72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikenne Laboratorio

8

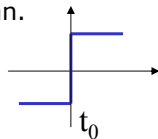
## Ortonormaali kanta

- Tarkastellaan jaksollista funktiota  $v(t)=v(t+mT_0)$ ,  
 $m=\dots,-1,0,1,\dots$

joka täyttää ehdot

- i) 
$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |v(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{Neliöintegroituva/Tehosignaali})$$
- ii) 
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |v(t_0 + \varepsilon) - v(t_0 - \varepsilon)| \neq 0 \quad \text{äärellisessä määrässä pisteitä välillä}$$
- $$-T_0/2 \leq t \leq T_0/2$$

jälkimmäinen ehto rajoittaa signaalin epäjatkuvuuskohtien määrän.



## Ortonormaali kanta

- Signaali, joka täyttää ehdot i) ja ii) voidaan esittää ortogonaalisen kannan avulla

**Exponentiaalinen Fourier-sarja**

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \phi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \exp\left(i \frac{2\pi k}{T_0} t\right)$$

**Fourier-kertoimet**

$$v_k = (v(t) | \phi_k(t)) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t) \phi_k^*(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t) \exp\left(-i \frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt$$

## Ekspontiaalinen Fourier-sarja

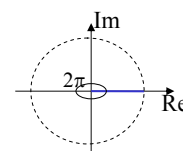
- On periodinen

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \exp\left(i \frac{2\pi k}{T_0} t\right) = v(t + mT_0), \quad m \in \mathbb{Z}$$

Tästä seuraa, että jaksollisen signaalin perusjaksolle laskettu Fourier sarja on voimassa kaikilla t:n arvoilla.

$$\begin{aligned} v(t + mT_0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \exp\left(i \frac{2\pi k}{T_0} (t + mT_0)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \exp\left(i \frac{2\pi k}{T_0} t\right) \exp\left(i \frac{2\pi k}{T_0} mT_0\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \exp\left(i \frac{2\pi k}{T_0} t\right) = v(t) \end{aligned}$$

$$\exp\left(i \frac{2\pi k}{T_0} mT_0\right) = \exp(i2\pi km) = 1$$



## Exponentiaalinen Fourier sarja

- Fourier-kertoimet

$$v_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) \exp\left(-i \frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- ovat kompleksisia suureita:

$$v_k = |v_k| \exp(i \arg\{v_k\}) \quad v_k \in \mathbb{C}$$

$$\arg\{v_k\} = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{v_k\}}{\text{Re}\{v_k\}}\right)$$

- vastaavat perustaajuuden  $f_0=1/T_0$  harmoonisia taajuuksia  $kf_0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- Tasavirtakomponentti  $k=0$  vastaa **signaalin keskimääräistä amplitudia**

$$v_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) \cdot 1 dt$$

## Trigonometrinen Fourier sarja

- Reaalille signaalille  $v(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t$   
 $v_{-k} = v_k^* = |v_k| \exp(-i \arg\{v_k\})$  *Hermittinen symmetria*
- Käytetään tätä ominaisuutta hyväksi:

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \exp\left(i \frac{2\pi k}{T_0} t\right)$$

$$v(t) = v_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |v_k| \left( \underbrace{\exp\left(i \arg\{v_k\} + i \frac{2\pi k}{T_0} t\right)}_{(k>0)} + \underbrace{\exp\left(-i \arg\{v_k\} - i \frac{2\pi k}{T_0} t\right)}_{(k<0)} \right)$$

$$\cos(\phi) = \frac{1}{2} (\exp(i\phi) + \exp(-i\phi))$$

*Trigonometrinen Fourier-sarja*

$$v(t) = v_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|v_k| \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t + \arg\{v_k\}\right)$$

S-.72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikenne Laboratorio

13

## Fourier kosini- ja sinisarja

- *Fourier-kertoimet*

$$v_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t) \exp\left(-i \frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x)$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t) \left( \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) - i \sin\left(-\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right) dt = \alpha_k - i\beta_k$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt$$

$$\beta_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt$$

S-.72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikenne Laboratorio

14

## Fourier kosini- ja sinisarja

- **Fourier sini- ja kosinisarja**

- Kun  $v(t)$  on reaalinen:

$$v_0 = \alpha_0$$

$$v_{-k} = v_k^* = (\alpha_k + i\beta_k)$$

- Nyt voidaan kirjoittaa

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \exp\left(i \frac{2\pi k}{T_0} t\right) =$$

$$= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (\alpha_k - i\beta_k) \exp\left(i \frac{2\pi k}{T_0} t\right) + (\alpha_k + i\beta_k) \exp\left(-i \frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right]$$

$$= \alpha_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \alpha_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) \right]$$

$$\begin{aligned} & -i \exp(ix) + i \exp(-ix) \\ &= \frac{2}{2i} (\exp(ix) - \exp(-ix)) \\ &= 2 \sin(x) \end{aligned}$$

## Fourier kosini- ja sinisarja

- Tarkastellaan reaalista signaalia  $v(t)$

- Jos pinta-ala signaalin yli on nolla,  $\alpha_0=0$   
( $\beta_0=0$  reaaliselle signaalille)

- Parillinen signaali

$$v(-t) = v(t)$$

$$\Rightarrow \beta_k = 0 \text{ sini-sarja häviää}$$

- Pariton signaali

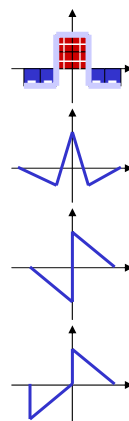
$$v(-t) = -v(t)$$

$$\Rightarrow \alpha_k = 0 \text{ kosini-sarja häviää}$$

- Puoliaalto symmetrinen:

$$v(-t) = -v(T_0/2 - t)$$

$$\text{Parilliset harmoniset häviävät } \alpha_{2n} = 0, \beta_{2n} = 0, n = 0, 1, 2, \dots$$





## Esimerkki 1

- Olkoon

$$v(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

- Fourier-sarjan kertoimet

$$v_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underbrace{A \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)}_{v(t)} \exp\left(-i\frac{2\pi k}{T_0}t\right) dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Huomataan, että

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right) = \frac{1}{2} \left( \exp\left(i\frac{2\pi}{T_0}t\right) \exp(i\phi) + \exp\left(-i\frac{2\pi}{T_0}t\right) \exp(-i\phi) \right)$$

Joten kertoimet voidaan kirjoittaa muotoon

$$v_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{A}{2} \left( \exp\left(-i\frac{2\pi(k-1)}{T_0}t + i\phi\right) + \exp\left(-i\frac{2\pi(k+1)}{T_0}t - i\phi\right) \right) dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

## Esimerkki 1

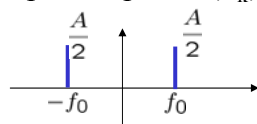
Ratkaistaan ensin integraali

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \exp\left(-i\frac{2\pi l}{T_0}t + i\psi\right) dt \\ &= \exp(i\psi) \frac{1}{T_0} \frac{T_0}{i2\pi l} \left( \exp\left(-i\frac{2\pi l T_0}{2}\right) - \exp\left(i\frac{2\pi l T_0}{2}\right) \right) = \exp(i\psi) \frac{1}{\pi l} \sin(\pi l) \end{aligned}$$

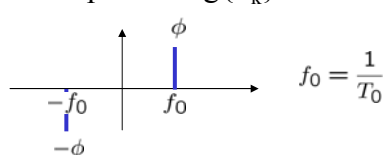
Yllä olevaa hyödyntäen saadaan

$$v_k = \frac{A}{2} \exp(i\phi) \frac{\sin(\pi(k-1))}{\pi(k-1)} + \frac{A}{2} \exp(-i\phi) \frac{\sin(\pi(k+1))}{\pi(k+1)} = \begin{cases} \frac{A}{2} \exp(i\phi) & k=1 \\ \frac{A}{2} \exp(-i\phi) & k=-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Amplitudispektri:  $|v_k|$



Vaihespektri:  $\arg\{v_k\}$



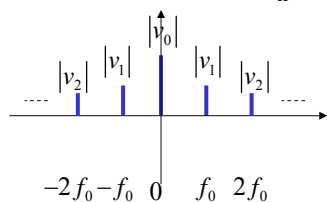
## Viivaspektri

- Reaalinen jaksollinen signaali voidaan esittää summana kosinisisignaaleja

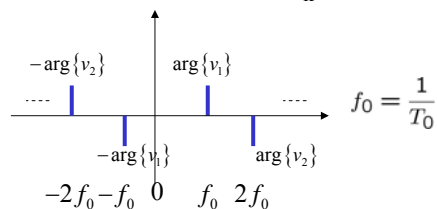
$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \exp\left(i \frac{2\pi k}{T_0} t\right) = v_0 + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k| \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t + \arg\{v_k\}\right)$$

- Viiva spektri:

Amplitudi spektri:  $|v_k|$



Vaihespektri:  $\arg\{v_k\}$



## Parsevalin teoreema

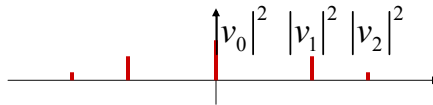
Signaalin keskimääräinen teho

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |v(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k|^2$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |v(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) v^*(t) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k^* \exp\left(-\frac{i2\pi k}{T_0} t\right) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k^* \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) \exp\left(-\frac{i2\pi k}{T_0} t\right) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k^* v_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k|^2 \end{aligned}$$

## Viivaspektri

- Tehospektri



Tehospektrin kertoimet, määrittävät miten signaalin keskimääräinen teho on jakautunut eri taajuuksille.

## Esimerkki 2

- Signaali, jossa on DC-komponentti

$$v(t) = V_0 + V_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

- Keskimääräinen teho

$$P = \langle v(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left( V_0^2 + 2V_0V_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) + V_1^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) \right) dt$$

Huomaa, että

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

Joten tehon lauseke voidaan viedä muotoon

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left( V_0^2 + 2V_0V_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) + V_1^2 \frac{1}{2} \left( 1 + \cos\left(\frac{4\pi}{T_0}t\right) \right) \right) dt$$

Osoittautuu, että

$$P = V_0^2 + \frac{1}{2}V_1^2$$

## Esimerkki 2

- Ratkaistaan signaalin Fourier-sarjan kertoimet:

– Vakion viivaspektri

$$v_1(t) = V_0$$

$$v_{1,k} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v_1(t) \exp\left(-i\frac{2\pi k}{T_0}t\right) dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$v_{1,k} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} V_0 \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi k}{T_0}t\right) dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$v_{1,k} = V_0 \frac{1}{T_0} \frac{T_0}{i2\pi k} \left( \exp\left(i\frac{2\pi k T_0}{T_0} \frac{1}{2}\right) - \exp\left(-i\frac{2\pi k T_0}{T_0} \frac{1}{2}\right) \right)$$

$$v_{1,k} = V_0 \text{sinc}(k)$$

Huomaa, että  $\text{sinc}(k) = \begin{cases} 0 & k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \\ 1 & k = 0 \end{cases}$

## Esimerkki 2

– Sinisignaalin viivaspektri

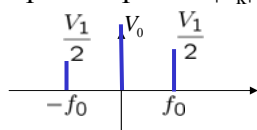
$$v_2(t) = V_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \phi\right)$$

johdettiin aiemmin

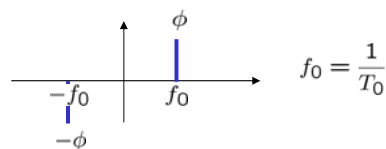
$$v_{2,k} = \frac{V_1}{2} \exp(i\phi) \frac{\sin(\pi(k-1))}{\pi(k-1)} + \frac{V_1}{2} \exp(-i\phi) \frac{\sin(\pi(k+1))}{\pi(k+1)} = \begin{cases} \frac{V_1}{2} \exp(i\phi) & k=1 \\ \frac{V_1}{2} \exp(-i\phi) & k=-1 \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$

- Signaalin  $v(t)$  viivaspektri saadaan summana  $v_k = v_{1,k} + v_{2,k}$

Amplitudispektri:  $|v_k|$



Vaihespektri:  $\arg\{v_k\}$



$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

## Esimerkki 2

- Ratkaistaan signaalin teho
  - Parsevalin teoreeman mukaan

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |v(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k|^2$$

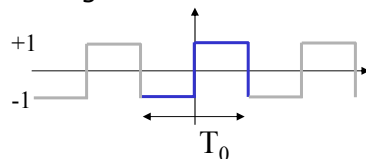
- joten, nyt

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k|^2 = |v_{2,-1}|^2 + |v_{1,0}|^2 + |v_{2,1}|^2 = \frac{1}{4}V_1^2 + V_0^2 + \frac{1}{4}V_1^2 = V_0^2 + \frac{1}{2}V_1^2$$

Tulos on sama kuin suoraan tehon määritelmästä johdettu.

## Esimerkki 3

- Kellosignaali



- Signaalin DC-komponentti on 0 ( $\alpha_0=0$ )
- Signaali on pariton, joten kosinisarja häviää ( $\alpha_k=0$   $k=1,2,3,\dots$ )

$$v_k = -i\beta_k$$

- Signaali on myös puoliaaltosymmetrinen, joten parilliset harmoniset katoavat

$$\beta_{2n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

## Esimerkki 3

- Lasketaan sinisarjan kertoimet

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax)$$

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt \\ &= -\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^0 \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} \sin\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt \\ &= -\frac{1}{T_0} \frac{1}{\frac{2\pi k}{T_0}} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} \left(-\frac{T_0}{2}\right)\right)\right) + \frac{1}{T_0} \frac{1}{\frac{2\pi k}{T_0}} \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} \frac{T_0}{2}\right) - 1\right) \\ &= \frac{1}{2\pi k} (-2 + 2\cos(\pi k)) = \frac{\cos(\pi k) - 1}{\pi k} = \begin{cases} 0 & k \text{ parillinen} \\ -\frac{2}{\pi k} & k \text{ pariton} \end{cases} \end{aligned}$$

- EkspONENTTI Fourier sarjan kertoimiksi tulee tällöin

$$v_{2k+1} = -i\beta_{2k+1} = i\frac{2}{\pi k}, \quad v_{2k} = 0$$

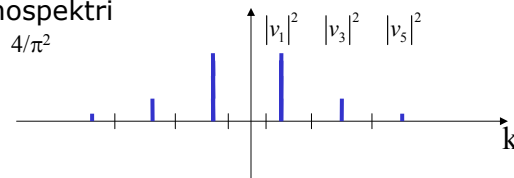
S-.72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikenne Laboratorio

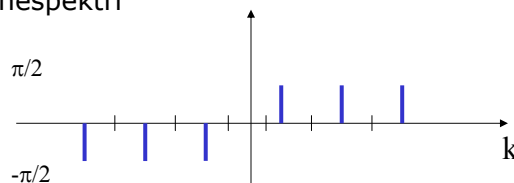
27

## Esimerkki 3

- Tehospektri



- Vaihespektri



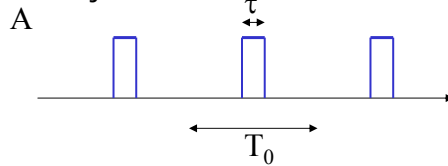
S-.72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikenne Laboratorio

28

## Esimerkki 4

- Pulssijono



$$\tau < T_0$$

- Signaalilla on DC-komponentti (pulssin pinta-ala on  $A\tau$ )
  - Signaali on parillinen (sinisarja häviää)  $v_k = \alpha_k$

$$v_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t) \exp\left(-\frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt$$

## Esimerkki 4

- Integroimalla saadaan

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t) \exp\left(-i \frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt \\ &= \frac{A}{T_0} \frac{1}{2\pi k} \left( \sin\left(\frac{2\pi k \tau}{T_0}\right) - \sin\left(-\frac{2\pi k \tau}{T_0}\right) \right) \\ &= A \frac{\sin\left(\frac{\pi \tau k}{T_0}\right)}{\pi k} = A \frac{\tau}{T_0} \frac{\sin\left(\frac{\pi \tau k}{T_0}\right)}{\pi k \frac{\tau}{T_0}} = A \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{T_0} k\right) \end{aligned}$$

$$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

## Esimerkki 4

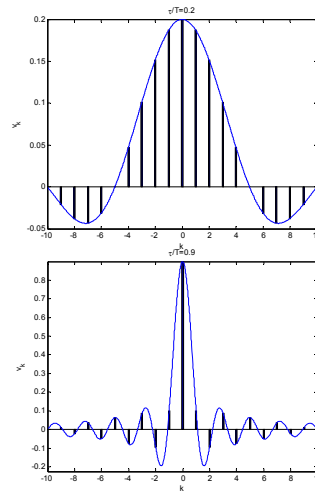
- Amplitudispektri

```

k=-10:10;
x=0.2; %x=tau/T <1
A=1;

for n=1:length(k)
    v(n)=A*x*sinc(k(n)*x);
end;

bar(k,v,0.1)
xlabel('k')
ylabel('v_k')
title(['\tau/T=' num2str(x)])
hold on
t=-10:0.01:10;
plot(t,A*x*sinc(x*t))
axis([-10 10 -x/4 x])
hold off
    
```



S-.72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikenne Laboratorio

31

## Katkaistu fourier-sarja

- Tarkastellaan approximaatiota

$$v_N(t) = \sum_{k=-N}^N v_k \exp\left(i \frac{2\pi k}{T_0} t\right)$$

- Jos  $v(t)$  täyttää ehdot i) ja ii)

$$i) P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |v(t)|^2 dt < \infty$$

- ii)  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |v(t_0 + \varepsilon) - v(t_0 - \varepsilon)| \neq 0$  äärellisessä määrässä pisteitä  $t_0$  välillä  $-T_0/2 \leq t \leq T_0/2$   
 niin erosignaalin keskimääräinen teho menee nollaan

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |v_N(t) - v(t)|^2 dt = 0$$

S-.72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

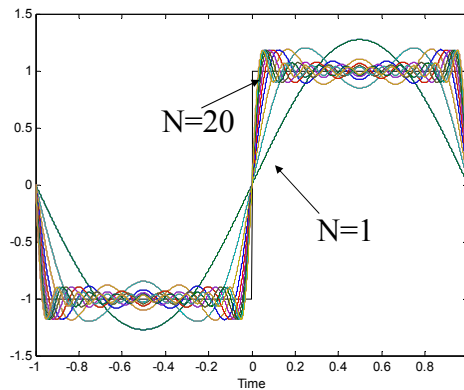
TKK Tietoliikenne Laboratorio

32



## Gibbsin Ilmiö

- Jos signaali on epäjatkuva amplitudinen, niin askelmaisessa muutoskohdassa on noin 9% ylitys riippumatta N:n suuruudesta.



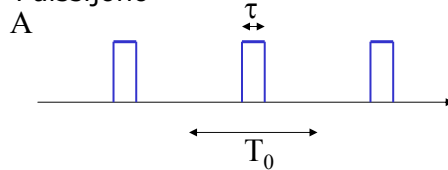
S-.72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

TKK Tietoliikenne Laboratorio

33

## Esimerkki 5

- Pulssijono



$$\tau < T_0$$

$$v_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t) \exp\left(-i \frac{2\pi k}{T_0} t\right) dt = A \frac{\tau}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{T_0} k\right)$$

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{i 2\pi \frac{k}{T} t}$$

$$\approx \hat{v}(t) = \sum_{k=-\frac{K}{2}}^{\frac{K}{2}} v_k e^{i 2\pi \frac{k}{T} t}$$

S-.72.1110 Signaalit ja järjestelmät 5 op

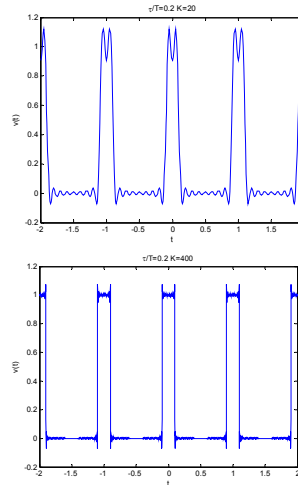
TKK Tietoliikenne Laboratorio

34

## Esimerkki 5

- Approksimaatio

```
K=20;  
k=-K/2:K/2;  
T=1;  
x=0.2; %x=tau/T <1  
A=1;  
  
for n=1:length(k)  
    v(n)=A*x*sinc(k(n)*x);  
end;  
  
t=-2*T:.001:2*T;  
vhat=0;  
for n=1:length(k)  
    vhat=vhat+v(n)*exp(i*2*pi*k(n)/T*t);  
end;  
plot(t,vhat)  
xlabel('t')  
ylabel('v(t)')  
title(['\tau/T=' num2str(x) ' K=' num2str(K)])
```



---

<http://www.jhu.edu/%7Esignals/fourier2/index.html>