

Luento 3

- Fourier-muunnos
- Rayleighn teoreema
- Spektritiheys

14.11.2007

1

Fourier-sarja

- Fourier-sarjan avulla pystyttiin esittämään jaksollinen signaali, jonka jaksonaika on T_0 .

– Fourier-sarja

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V(kf_0) \exp(i2\pi kf_0 t) \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

– Fourier-komponentit

$$V(kf_0) \stackrel{\text{def}}{=} v_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) \exp(-i2\pi kf_0 t) dt$$

- Entäpä aperiodiset signaalit, joilla jaksonaika $T_0 \rightarrow \infty$?

14.11.2007

2

Fourier-muunnos

- Esitetään signaali Fourier-sarjana:

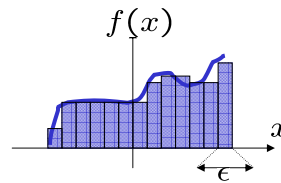
$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) \exp(-i2\pi k f_0 t) dt \right) \exp(i2\pi k f_0 t)$$

- Raja-arvo $T_0 \rightarrow \infty$: $\frac{k}{T_0} \rightarrow f$, $\frac{1}{T_0} \rightarrow df$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \cdot \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \cdot$

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} v(t) \exp(-i2\pi ft) dt \right)}_{V(f)} \exp(i2\pi ft) df$$

Euler integral

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \epsilon f(k\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$



Fourier-muunnos

- **Fourier-muunnos**

$$V(f) = \mathcal{F}\{v(t)\} \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \exp(-i2\pi ft) dt$$

- **Käänteismuunnos**

$$v(t) = \mathcal{F}^{-1}\{V(f)\} \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} V(f) \exp(i2\pi ft) df$$

- Dirichlet'n ehdot Fourier muuntuvalle energiasignaaliille

I: Signaali on itseisesti integroituva

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)| dt < \infty$$

II: Signaalin maksimi- ja minimiarvot ovat äärellisiä jokaisella äärellisellä aikavälillä $t \in (a, b)$

$$\sup_{\{t_i, t_{i+1}\}} \left\{ \sum_i |s(t_{i+1}) - s(t_i)| \right\} < \infty, \quad a \leq t_i < t_{i+1} \leq b$$

III: Signaalin epäjatkuvuuskohtia on rajallinen määrä

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |s(t_0 + \epsilon) - v(t_0 - \epsilon)| \neq 0 \quad \text{äärellisessä määrässä pisteitä välillä } t_0 \in (-1, 1)$$

Symmetria ominaisuudet

- Jos $v(t) \in \mathbb{R}$, $V(f)$ on **hermiittinen**:

$$\overline{V(-f)} = V^*(f)$$

Toisin sanoen

$$|V(-f)| = |V^*(f)| \quad \arg\{V(-f)\} = -\arg\{V(f)\}$$

Parillinen Pariton

- Asia on helppo todentaa:

$$V(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-i2\pi(-f)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{i2\pi ft} dt$$

$$v(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow v^*(t) = v(t)$$

$$V^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v^*(t) e^{i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{i2\pi ft} dt = V(-f)$$

- Vastaavasti, jos $v(t)$ on imaginäärinen, $V(f)$ on **anti-hermiittinen**:

$$\overline{V(-f)} = -V^*(f)$$

14.11.2007

5

Symmetria ominaisuudet

Tarkastellaan tapauksia, jossa $v(t) \in \mathbb{R}$

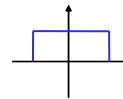
- Jos $v(t)$ on **parillinen** $v(-t) = v(t)$

$$V(f) = 2 \int_0^{\infty} v(t) \cos(2\pi ft) dt$$

on reaalinen. Tällöin

$$\overline{V(-f)} = V^*(f) = V(f)$$

eli $V(f)$ on **reaalinen ja parillinen**



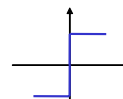
- Jos $v(t)$ on **pariton** $v(-t) = -v(t)$

$$V(f) = -i2 \int_0^{\infty} v(t) \sin(2\pi ft) dt$$

on imaginäärinen. Tällöin

$$\overline{V(-f)} = V^*(f) = -V(f)$$

eli $V(f)$ on **imaginäärinen ja pariton**



14.11.2007

6

Symmetria ominaisuudet

Tarkastellaan tapausta $v(t) = iv_Q(t) \in \mathbb{C}$, $\text{Im}\{v(t)\} = v_Q(t)$

- Jos $v_Q(t)$ on *parillinen* $v_Q(-t) = v_Q(t)$

$$V(f) = i2 \int_0^{\infty} v_Q(t) \cos(2\pi ft) dt$$

on *imaginäärinen*. Tällöin

$$V(-f) = V(f)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

eli $V(f)$ on *imaginäärinen ja parillinen*.

- Jos $v_Q(t)$ on *pariton* $v_Q(-t) = -v_Q(t)$

$$V(f) = 2 \int_0^{\infty} v_Q(t) \sin(2\pi ft) dt$$

on *reaalinen*. Tällöin

$$V(-f) = -V(f)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

eli $V(f)$ on *reaalinen ja pariton*

14.11.2007

7

Symmetria ominaisuudet

- Tarkastellaan nyt tapausta yleistä tapausta $v(t) \in \mathbb{C}$
 - Fourier-muunnos on lineaarinen operaatio, joten

$$F\{v(t)\} = F\{\text{Re}\{v(t)\}\} + i \cdot F\{\text{Im}\{v(t)\}\}$$

Re{v(t)}	Im{v(t)}	Re{V(f)}	Im{V(f)}
Parillinen		Parillinen	
Pariton			Pariton
Reaalinen		Hermiittinen	
	Parillinen		Parillinen
	Pariton	Pariton	
	Imaginaarinen	Anti-hermiittinen	
Parillinen	Parillinen	Parillinen	Parillinen
Parillinen	Pariton	Reaalinen	
Pariton	Parillinen		Imaginaarinen
Pariton	Pariton	Pariton	Pariton

14.11.2007

8

Kausaaliset signaalit

- Signaali on kausaalinen, jos $v(t)=0, t<0$.

- Kausaalisen signaalin Fourier-muunnos

$$V(f) = \mathcal{F}\{v(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} v(t) \exp(-i2\pi ft) dt$$

- Verrataan yksipuoliseen Laplace-muunnokseen

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} v(t) \exp(-st) dt \quad s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$$

- Jos $\sigma=0$ ja $\omega=2\pi f$, Laplace-muunnoksesta tulee Fourier-muunnos
- Laplace-muunnos on olemassa laajemmalle joukolle signaaleita kuin Fourier muunnos.

14.11.2007

9

Esimerkki

- Tarkastellaan eksponentiaalista signaalia

$$v(t) = e^{at}, \quad t \geq 0$$

- Fourier muunnos:

Dirichlet'n ehto I:

$$\int_0^{\infty} |v(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} \Big|_0^{\infty} \rightarrow \infty, \quad a \geq 0$$
$$= -\frac{1}{a}, \quad a < 0$$

eli Fourier-muunnos on olemassa kun $-\infty < a < 0$
(myöhemmin osoittautuu, että myös tapaus $a=0$ on muunnettavissa)

$$F\{v(t)\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-i2\pi ft} dt = \frac{1}{-a + i2\pi f}, \quad a < 0$$

- Laplace-muunnos:

$$\int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{at} dt = \frac{1}{-a + s}, \quad \text{Re}\{s\} < -a$$

Laplace-muunnos löytyy myös tapaukselle $a > 0$

14.11.2007

10

Boden diagrammi

- Amplitudi spektritiheys
 $|V(f)|$
- Vaihespektritiheys
 $\arg\{V(f)\}$
- **Boden diagrammi:**
Amplitudi (dB) ja vaihe taajuuden funktiona

14.11.2007

11

Boden diagrammi

- Esimerkki:

$$v(t) = \exp(-t), \quad t \geq 0$$

- Fourier-muunnos

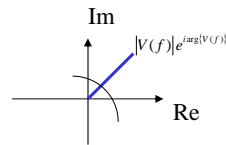
$$V(f) = \int_0^{\infty} \exp(-(i2\pi f + 1)t) dt = \frac{1}{i2\pi f + 1}$$

- Amplitudi ja vaihe:

$$V(f) = |V(f)|e^{i\arg\{V(f)\}}$$

$$|V(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi f)^2}}$$

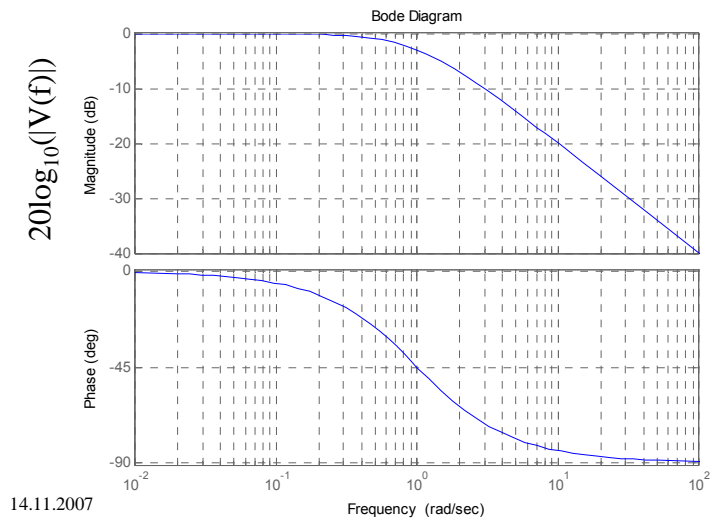
$$\arg\{V(f)\} = \arctan\left(\frac{-2\pi f}{1}\right) = -\arctan(2\pi f)$$



14.11.2007

12

Bode diagram



Spektritehis

Rayleigh'n Energia teoreema

$$E_v = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)v^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)V^*(f)df$$

$$\begin{aligned} E_v &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t)v^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} V(f)\exp(i2\pi ft)df \right)^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} V^*(f)\exp(-i2\pi ft)df \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\exp(-i2\pi ft)dt}_{v(f)} V^*(f)df \end{aligned}$$

- Tulkinta: $|V(f)|^2 = V(f)V^*(f)$ kertoo miten signaalin energia on jakautunut eri taajuuksille (J/Hz)

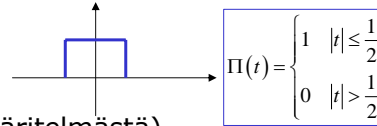
14.11.2007

14

Pulssin spektritiheys I

- Pulssi, jonka energia on 1 J

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$



- Fourier-muunnos (suoraan määritelmästä)

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-i2\pi ft) dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \exp(-i2\pi ft) dt$$

$$= -\frac{1}{i2\pi f \sqrt{T}} \left(\exp\left(-i2\pi f \frac{T}{2}\right) - \exp\left(-i2\pi f \frac{-T}{2}\right) \right)$$

$$= \sqrt{T} \frac{1}{\pi f T} \frac{(\exp(i\pi f T) - \exp(-i\pi f T))}{2i}$$

$$= \sqrt{T} \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = \sqrt{T} \operatorname{sinc}(fT)$$

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

$$14.11.2007 \quad |S(f)|^2 = T \operatorname{sinc}^2(fT)$$

15

Pulssin tehospektri II

- Fourier-muunnos käyttäen hyväksi signaalin ominaisuuksia:
 - Pulssi on reaalinen ja parillinen. Sen Fourier-muunnos on siis reaalinen ja parillinen.
 - Fourier-muunnos on siis (ks. kalvo 6)

$$V(f) = 2 \int_0^{\infty} v(t) \cos(2\pi ft) dt$$

- Muunnokseksi saadaan

$$\int \sin(ax) dx = \frac{1}{a} \cos(ax) + C$$

$$S(f) = 2 \int_0^{\infty} \Pi(t) \cos(2\pi ft) dt = 2 \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\sqrt{T}} \cos(2\pi ft) dt = \left|_{t=0}^{\frac{T}{2}} 2 \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\sin(2\pi ft)}{2\pi f} \right.$$

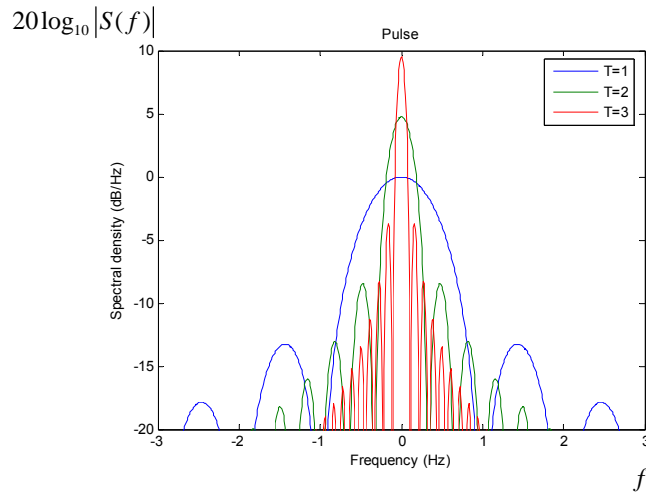
$$= \frac{\sin\left(2\pi f \frac{T}{2}\right) - \sin(-2\pi f \cdot 0)}{\pi f \sqrt{T}} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = \sqrt{T} \operatorname{sinc}(fT)$$

$$\Rightarrow |S(f)|^2 = T \operatorname{sinc}^2(fT)$$

14.11.2007

16

Pulssin tehospektri



14.11.2007

17

Fourier muunnoksen ominaisuuksia

- Linearisuus (superpositio)
 $F\{a_1v_1(t) + a_2v_2(t)\} = a_1V_1(f) + a_2V_2(f)$
- Aikasiirto
 $F\{v(t - \tau)\} = V(f)e^{-i2\pi f\tau}$
- Aikaskaalaus
 $F\{v(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|}V\left(\frac{f}{\alpha}\right)$
- Konjugaatti
 $F\{v^*(t)\} = V^*(-f)$
- Duaalisuus
 $F\{V(t)\} = v(-f)$
- Derivaatta
 $F\left\{\frac{d^n}{dt^n}v(t)\right\} = (i2\pi f)^n V(f)$
- Integraali
 $F\left\{\int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau_1} \dots \int_{-\infty}^{\tau_{n-1}} v(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1\right\} = \frac{1}{(i2\pi f)^n} V(f)$
- Konvoluutio
 $F\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)v(t - \tau) d\tau\right\} = H(f)V(f)$
- Kertolasku
 $F\{h(t)v(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} H(\phi)V(f - \phi) d\phi$

14.11.2007

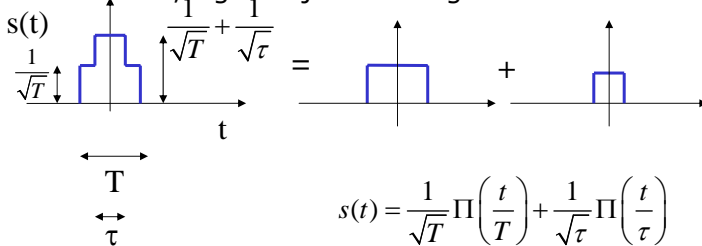
18

Superpositio

- Fourier muunnos on lineaarinen operaattori, joten osista koostuva signaali voidaan Fourier muuntaa osissa

$$F\{v(t) + u(t)\} = F\{v(t)\} + F\{u(t)\}$$

- Esimerkki, signaali jonka energia on 2 J



$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{1}{\sqrt{\tau}} \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$F\left\{\frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = \sqrt{T} \operatorname{sinc}(fT)$$

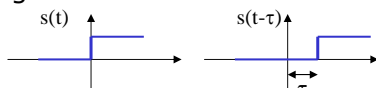
$$S(f) = \sqrt{T} \operatorname{sinc}(fT) + \sqrt{\tau} \operatorname{sinc}(f\tau)$$

14.11.2007

19

Aikasiirto

- Tarkastellaan signaalia $s(t)$, jonka Fourier muunnos on $S(f)$
- Signaalia viivästetään τ :n verran.



Ratkaistaan viivästetyñ signaalin Fourier-muunnos

$$F\{s(t-\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau) e^{-i2\pi ft} dt$$

Tehdään muuttujan vaihdos
 $t' = t - \tau \Rightarrow t = t' + \tau, \quad dt' = dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s(t') e^{-i2\pi f(t'+\tau)} dt' = e^{-i2\pi f\tau} \int_{-\infty}^{\infty} s(t') e^{-i2\pi ft'} dt'$$

- Aikasiirretyn signaalin Fourier-muunnos:

$$F\{s(t-\tau)\} = e^{-i2\pi f\tau} S(f)$$

14.11.2007

20

Taajuussiirto

- Tarkastellaan signaalia $s(t)$, jonka Fourier muunnos on $S(f)$
- Taajuussiirto $S(f-f_0)$



Käänteismuunnos

$$F^{-1}\{S(f-f_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f-f_0)e^{i2\pi ft} df$$

Tehdään muuttujan vaihdos

$$f' = f - f_0 \Rightarrow f = f' + f_0, \quad df' = df$$

$$= e^{i2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} S(f')e^{i2\pi f' t} df'$$

- Taajuussiirretyn signaalin muunnospari:

$$F^{-1}\{S(f-f_0)\} = F^{-1}\{S(f)\}e^{i2\pi f_0 t} = s(t)e^{i2\pi f_0 t}$$

$$F\{s(t)e^{i2\pi f_0 t}\} = S(f-f_0)$$

14.11.2007

21

Lineaarinen modulaatio

- Moduloitu signaali

$$x(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t)$$

- Voidaan kirjoittaa muotoon

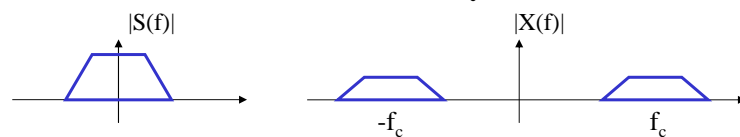
$$x(t) = s(t) \frac{1}{2} (e^{i2\pi f_c t} + e^{-i2\pi f_c t}) = \frac{1}{2} s(t) e^{i2\pi f_c t} + \frac{1}{2} s(t) e^{-i2\pi f_c t}$$

- Fourier muunnos

$$X(f) = \frac{1}{2} S(f-f_c) + \frac{1}{2} S(f+f_c)$$

$$F\{s(t)e^{i2\pi f_0 t}\} = S(f-f_0)$$

Modulaatio siirtää signaalin taajuuskaistan f_c ympäristöön:

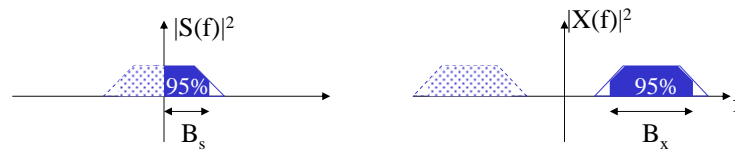


14.11.2007

22

Kaistanleveys

- Kaistanleveys B määrittää millä taajuusalueella merkittävä osa (esim. 95%) signaalin tehosta/energiasta on.
- Kaistanleveyden määrittämisessä huomioidaan vain positiiviset taajuudet.



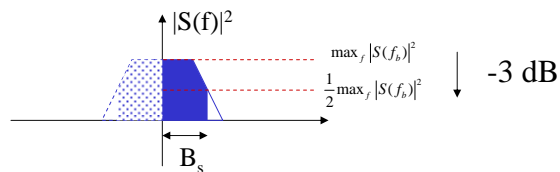
- Moduloidun signaalin kaistanleveys on kaksinkertainen kantataajuiseen signaaliin nähden: $B_x = 2B_s$

14.11.2007

23

Kaistanleveys

- Yksinkertainen määritelmä on puolentehon (energian) kaistanleveys.



$$\frac{|S(f_b)|^2}{\max_f |S(f_b)|^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow f_b > 0$$

$B_s = f_b$ Kantataajuinen signaali

$B_x = 2f_b$ Moduloitu signaali

14.11.2007

24

Kaistanleveys

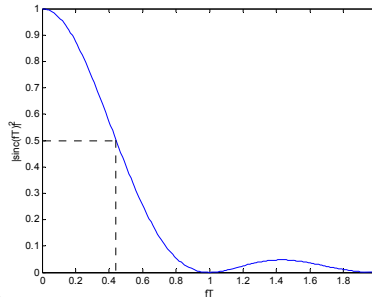
- Pulssin puolen-tehon kaistanleveys

$$\frac{|S(f_b)|^2}{\max_f |S(f_b)|^2} = \text{sinc}^2(f_b T) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |\text{sinc}(f_b T)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_b \approx \frac{0.443}{T}$$

$$B_s = f_b \approx \frac{1}{2T}$$

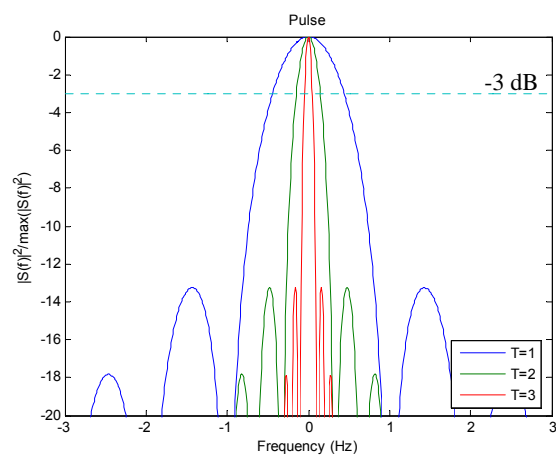
$$B_x = 2f_b \approx \frac{1}{T} \quad \text{Moduloidun pulssin taajuuskaista on kääntäen verrannollinen pulssin pituuteen}$$



14.11.2007

25

Kaistanleveys



14.11.2007

26

Aika- ja taajuuskaalaus

- Aikaskaalaus

$$F\{s(at)\} = \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right) \quad \begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ a \neq 0 \end{array}$$

- Taajuuskaalaus

$$F^{-1}\{S(af)\} = \frac{1}{|a|} s\left(\frac{t}{a}\right)$$

Todistus

$$F\{s(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(at)e^{-i2\pi ft} dt$$

$$t' = at \Rightarrow t = \frac{t'}{a}, dt = \frac{dt'}{a}$$

Muuttujan vaihto

$$F\{s(at)\} = \frac{1}{a} \int_{-\infty \operatorname{sgn}(a)}^{\infty \operatorname{sgn}(a)} s(t')e^{-i2\pi ft'} dt'$$

Jos $\operatorname{sgn}(a)=-1$ integrointi rajat vaihtuvat, tällöin tarvitaan kaavaa

$$F\{s(at)\} = \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

14.11.2007

27

Duaalisuus

- Jos muunnospari $F(s(t)) = S(f)$ tunnetaan, pätee signaalille $y = S(t)$

$$F\{S(t)\} = s(-f) \quad F^{-1}\{s(f)\} = S(-t)$$

Todistus

$$F(S(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{i2\pi(-f)t} dt$$

$$f' = t$$

$$t' = -f$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S(f')e^{i2\pi f'f} df' = s(t') = s(-f)$$

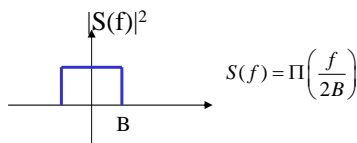
S(f):n käänteismuunnoksen määritelmä

14.11.2007

28

Ideaallinen alipäästösuodatin

- Ideaallinen kaistanpäästösuodatin jonka taajuuskaista on B



$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Vastaavan aikataason signaalin (impulssivasteen) Fourier-muunnos on

$$S(f) = F \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi \left(\frac{t}{T} \right) \right\} = \sqrt{T} \text{sinc}(fT)$$

- Duaalisuudesta seuraa, että

$$F^{-1} \{ S(f) \} = F \left\{ \sqrt{2B} \frac{1}{\sqrt{2B}} \Pi \left(\frac{f}{2B} \right) \right\} = 2B \text{sinc}(-2Bf)$$

ja koska sinc on parillinen saadaan $s(t) = 2B \text{sinc}(2Bt)$

14.11.2007

29

Derivoimiskeino

- Lausutaan signaali käänteismuunnoksen avulla

$$s(t) = F^{-1} \{ s(f) \} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi ft} df$$

- Signaalin aikaderivaatta

$$\frac{d^n}{dt^n} s(t) = \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi ft} df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \frac{d^n}{dt^n} e^{i2\pi ft} df \quad \text{Koska integraali ei ole muuttujan } t \text{ suhteen, voidaan derivaatta operaattori viedä integraalin sisälle}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{S(f) (i2\pi f)^n}_{F \left\{ \frac{d^n}{dt^n} s(t) \right\}} e^{i2\pi ft} df \quad \text{Derivoitun signaalin Fourier-muunnos}$$

- Muunnoskaavaksi saadaan

$$F \left\{ \frac{d^n}{dt^n} s(t) \right\} = (i2\pi f)^n S(f)$$

14.11.2007

30

Integroimiskeino

- Tarkastellaan signaalia

$$y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^{\tau_1}}_{n \text{ kpl}} s(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_n$$

Tällöin

$$s(t) = \frac{d^n}{dt^n} y(t)$$

Derivoimiskeinosta seuraa

$$S(f) = F\{s(t)\} = (i2\pi f)^n Y(f)$$

$$F\left\{\frac{d^n}{dt^n} s(t)\right\} = (i2\pi f)^n S(f)$$

Joten $Y(f) = \frac{1}{(i2\pi f)^n} S(f)$

Muunnoskaavaksi saadaan:

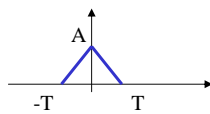
$$F\left\{\underbrace{\int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^{\tau_1}}_{n \text{ kpl}} s(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_n\right\} = \frac{1}{(i2\pi f)^n} S(f)$$

14.11.2007

31

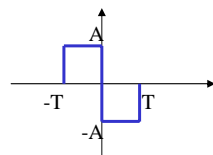
Kolmiopulssi (1/2)

- Kolmiopulssi



$$s(t) = \begin{cases} A(T - |t|) & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

- Kolmiopulssin aikaderivaatta



$$\frac{d}{dt} s(t) = A\Pi\left(\frac{t + \frac{1}{2}T}{T}\right) - A\Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T}\right)$$

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

14.11.2007

32

Kolmiopulssi (2/2)

- Fourier-muunnetaan aikaderivaatta

$$\frac{d}{dt}s(t) = A\Pi\left(\frac{t+\frac{1}{2}T}{T}\right) - A\Pi\left(\frac{t-\frac{1}{2}T}{T}\right)$$

$$F\left\{A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = AT\text{sinc}(fT)$$

$$F\{s(t-\tau)\} = e^{-i2\pi f\tau} S(f)$$

$$F\left\{\frac{d}{dt}s(t)\right\} = AT\text{sinc}(fT)e^{i2f\frac{T}{2}} - AT\text{sinc}(fT)e^{-i2f\frac{T}{2}}$$

$$= i2AT\text{sinc}(fT)\sin(fT)$$

- $s(t)$:n Fourier-muunnos saadaan nyt integroimiskeinon avulla

$$F\left\{\int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^{\tau_n} s(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_n\right\} = \frac{1}{(i2\pi f)^n} S(f)$$

$$S(f) = \frac{1}{i2\pi f} F\left\{\frac{d}{dt}s(t)\right\} = \frac{i2AT\text{sinc}(fT)\sin(fT)}{i2\pi f} = AT\text{sinc}^2(fT)$$

14.11.2007

33

Gaussin pulssi (1/4)

- Gaussin pulssi:

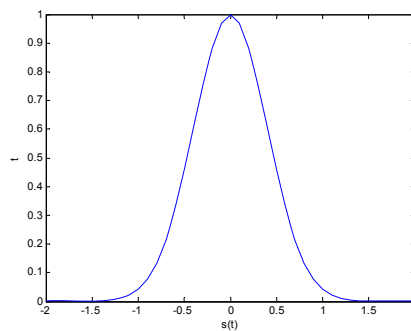
$$s(t) = A\exp\left(-\pi\left(\frac{t}{T}\right)^2\right)$$

- Pulssi on parillinen:

$$s(-t) = s(t)$$

- Pulssin derivaatta:

$$\frac{d}{dt}s(t) = -A\pi\left(\frac{2t}{T^2}\right)\exp\left(-\pi\left(\frac{t}{T}\right)^2\right) = \pi\left(\frac{2t}{T^2}\right)s(t)$$



14.11.2007

34

Gaussin pulssi (2/4)

1. Gaussin-pulssin derivaatta:

$$\frac{d}{dt} s(t) = -\frac{2\pi t}{T^2} s(t)$$

2. Derivaatan F-muunnos

$$F \left\{ \frac{d}{dt} s(t) \right\} = i2\pi f S(f)$$

3. Sovelletaan duaalisuutta derivaatan F-muunnokseen:

$$F^{-1} \{ v(f) \} = V(-f)$$

$$F \left\{ \frac{d}{dt} v(t) \right\} = i2\pi f V(f)$$

$$\Leftrightarrow F^{-1} \left\{ \frac{d}{df} v(f) \right\} = -i2\pi t V(-t)$$

4. Huomataan yhteyksien

1. ja 3. välillä:

$$\frac{d}{dt} s(t) = -\frac{2\pi t}{T^2} s(t) = \frac{1}{iT^2} \underbrace{(-i2\pi t) s(-t)}_{\underbrace{v(-t)}_{F^{-1} \left\{ \frac{d}{df} v(f) \right\}}}$$

joten

$$F \left\{ \frac{d}{dt} s(t) \right\} = \frac{1}{iT^2} \underbrace{\frac{d}{df} S(f)}_{\frac{d}{df} v(f)}$$

14.11.2007

35

Gaussin pulssi (3/4)

5. Kootaan tulokset yhteen Kohdan 2. perusteella

$$F \left\{ \frac{d}{dt} s(t) \right\} = i2\pi f S(f)$$

ja kohdan 4. perusteella

$$F \left\{ \frac{d}{dt} s(t) \right\} = \frac{1}{iT^2} \frac{d}{df} S(f)$$

Eli,

$$\frac{1}{iT^2} \frac{d}{df} S(f) = i2\pi f S(f)$$

6. Ratkaistaan differentiaali yhtälö

$$\frac{d}{df} S(f) = -2\pi f T^2 S(f)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dS(f)}{S(f)} = -2\pi f T^2 df$$

$$\Leftrightarrow \ln S(f) = -\pi f^2 T^2 + C$$

$$\Rightarrow S(f) = \exp(-\pi f^2 T^2) \underbrace{\exp(C)}_k$$

$$k = \exp(C) \Leftrightarrow C = \ln(k)$$

14.11.2007

36

Gaussin pulssi (4/4)

7. Vakio k määräytyy Rayleigh'n energia teoreemasta

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k^2 \exp(-2\pi T^2 f^2) df = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \exp\left(-2\pi \left(\frac{t}{T}\right)^2\right) dt$$

$$\boxed{\frac{t'}{T} = Tf \Rightarrow t' = T^2 f, \quad df = \frac{dt'}{T^2}} \quad \text{Muuttujan vaihto}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} k^2 \exp\left(-2\pi \left(\frac{t'}{T}\right)^2\right) \frac{dt'}{T^2} = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \exp\left(-2\pi \left(\frac{t}{T}\right)^2\right) dt$$

$$\Rightarrow k = AT$$

8. Tulokseksi saatiin $S(f) = AT \exp(-\pi f^2 T^2)$

14.11.2007

37

Gaussin pulssi -II (1/2)

- Toinen tapa:
 - Käytetään hyväksi integrointikaavaa

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt = 1}$$

- Signaali

$$s(t) = A \exp\left(-\pi \left(\frac{t}{T}\right)^2\right)$$

- Fourier-muunnos:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A \exp\left(-\pi \left(\frac{t}{T}\right)^2\right) \exp(-i2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} A \exp\left(-\left(\pi \frac{1}{T^2} t^2 + i2\pi ft\right)\right) dt$$

14.11.2007

38

Gaussin pulssi -II (2/2)

- Täydennetään neliöksi

$$\begin{aligned}
 S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} A \exp \left(-\frac{\pi}{T^2} \left(\underbrace{t^2 + 2ifT^2t - f^2T^4}_{(t - ifT^2)^2} + f^2T^4 \right) \right) dt \\
 &= A \exp(-\pi f^2 T^2) \sqrt{2\pi} \left(\frac{T}{\sqrt{2\pi}} \right) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{T}{\sqrt{2\pi}} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{(t - (-ifT^2))^2}{2 \left(\frac{T}{\sqrt{2\pi}} \right)^2} \right) dt}_{=1} \\
 &= \underline{AT \exp(-\pi f^2 T^2)}
 \end{aligned}$$

14.11.2007

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) dt = 1$$

39

Gaussin pulssi

• Gaussin pulssi

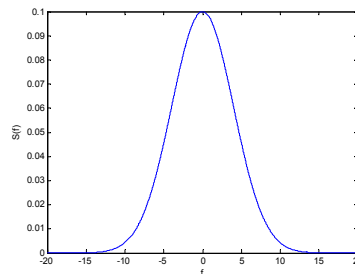
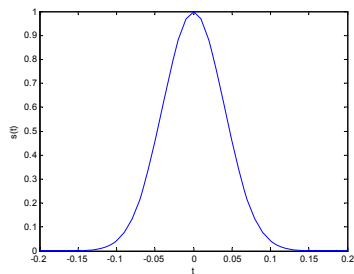
$$s(t) = A \exp \left(-\pi \left(\frac{t}{T} \right)^2 \right)$$

• Fourier-muunnos

$$S(f) = AT \exp(-\pi(Tf)^2)$$

Pulssin muoto säilyy
Fourier-muunnoksessa

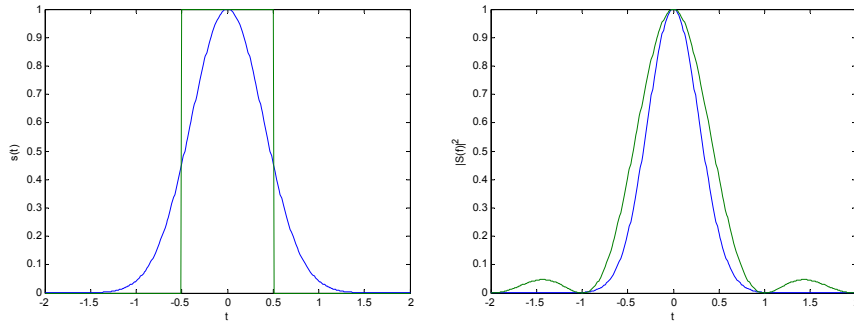
T=0.1



14.11.2007

40

Yksikköpulssi vs Gaussin pulssi



14.11.2007

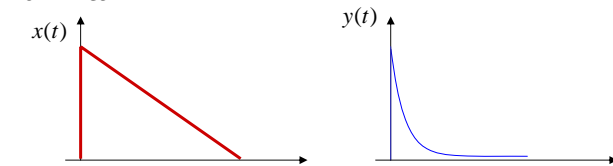
41

Konvoluutio integraali

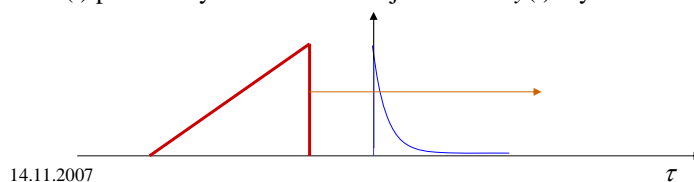
- Konvoluutio

$$y(t) \otimes x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Tulkinta



$x(t)$ peilataan y-akselin suhteen ja liutetaan $y(t)$:n yli



14.11.2007

42

Konvoluutio integraali

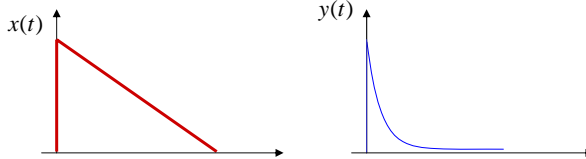
<http://www.jhu.edu/%7Esignals/convolve/index.html>

14.11.2007

43

Konvoluutio integraali

- Esimerkki:



$$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{T} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

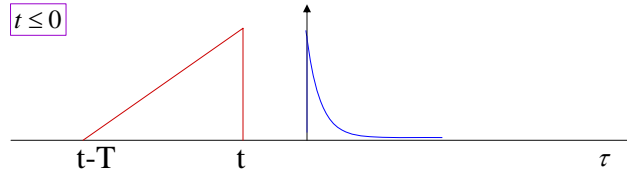
14.11.2007

44

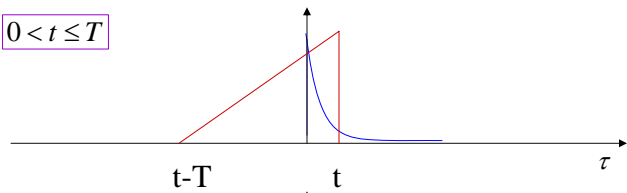
Konvoluutio integraali

$t \leq 0$

$y(t) = 0$



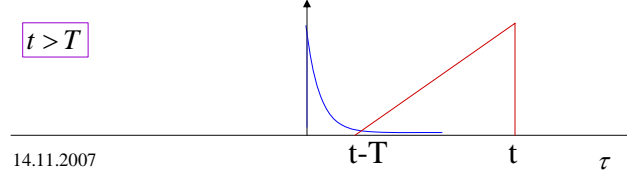
$0 < t \leq T$



$$y(t) = \int_0^t e^{-\tau} \frac{t-\tau}{T} d\tau$$

$$= \frac{1}{T} (t - 1 + e^{-t})$$

$t > T$



$$y(t) = \int_{t-T}^t e^{-\tau} \frac{t-\tau}{T} d\tau$$

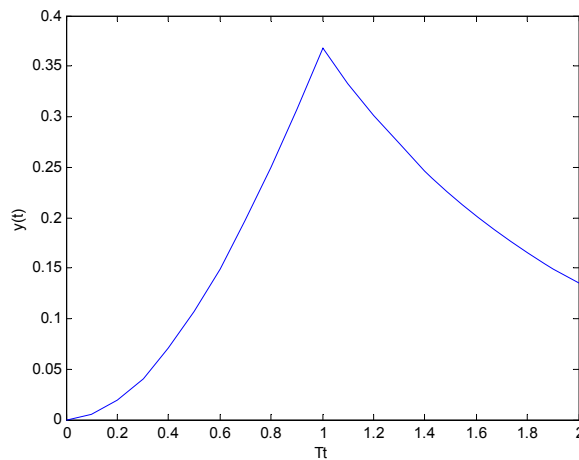
$$= \frac{1}{T} (T - 1 + e^{-T}) e^{-(t-T)}$$

14.11.2007

45

Konvoluutio integraali

$$y(t) \otimes x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) x(t-\tau) d\tau$$



14.11.20

46

Konvoluutio integraali

- Tarkastellaan kahta energia signaalia $u(t)$ ja $h(t)$, joiden Fourier-muunnokset ovat $U(f)$ ja $H(f)$.

- Signaalien välinen konvoluutio on $y(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

- Signaalin $y(t)$ Fourier muunnos

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \right) \exp(-i2\pi ft)dt$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) \exp(-i2\pi ft)dt \right) d\tau$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)U(f) \exp(-i2\pi f\tau)d\tau$$

$$Y(f) = H(f)U(f)$$

14.11.2007

47

Kertolasku

- Tarkastellaan kahta energia signaalia $u(t)$ ja $h(t)$, joiden Fourier-muunnokset ovat $U(f)$ ja $H(f)$.

- Signaalien tulo

$$y(t) = u(t)h(t)$$

- Signaalien tulon Fourier-muunnos:

$$F\{u(t)h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)h(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} U(\phi)e^{i2\pi\phi t} d\phi \right)}_{u(t)} h(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} U(\phi) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i2\pi(f-\phi)t} dt \right)}_{H(f-\phi)} d\phi = \int_{-\infty}^{\infty} U(\phi)H(f-\phi)d\phi$$

- Muunnos on konvoluutio integraali

$$F\{u(t)h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} U(\phi)H(f-\phi)d\phi$$

14.11.2007

48

Katkaistu signaali

- Tarkastellaan signaalia $s(t)$, jonka Fourier-muunnos on $S(f)$.
- Katkaistaan signaalista jakso $t \in (-T/2, T/2)$.
- Katkaistu signaali

$$y(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)s(t)$$

- Katkaistun signaalin Fourier-muunnos

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\phi)T \operatorname{sinc}((f - \phi)T) d\phi$$

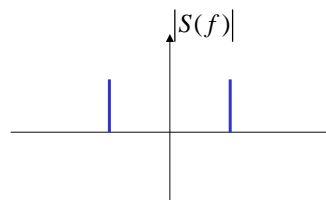
on signaalin Fourier-muunnoksen ja sinc-funktion konvoluutio.

14.11.2007

49

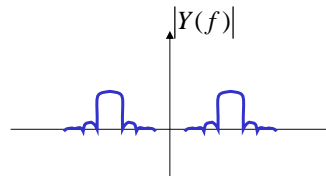
Katkaistu sinisignaali

- Sinimuotoinen signaali
 $s(t) = \cos(2\pi f_c t) \quad t \in [-\infty, \infty]$



- Katkaistu signaali

$$y(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_c t) & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$



- Jotta spektri ei katkaistessa leviäisi, käytetään katkaisuun ikkunafunktioita.

14.11.2007

50