Luento 4

- Erikoissignaalien Fourier-muunnokset
- Näytteenotto

Fourier-muunnos

- ***Fourier-muunnos***

$$\boxed{V(f) = \mathcal{F}\{v(t)\} \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \exp(-i2\pi f t)\, dt}$$

- ***Käänteismuunnos***

$$\boxed{v(t) = \mathcal{F}^{-1}\{V(f)\} \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} V(f) \exp(i2\pi f t)\, df}$$

- Dirichlet'n ehdot Fourier muuntuvalle energiasignaalille

  I: Signaali on itseisesti integroituva

  $$\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|\, dt < \infty$$

  II: Signaalin maksimi- ja minimiarvot ovat äärellisiä jokaisella äärellisellä aikavälillä $t \in (a,b)$

  $$\sup_{\{(t_{i+1},t_i)\}} \left\{ \sum_i |s(t_{i+1}) - s(t_i)| \right\} < \infty, \quad a \le t_i < t_{i+1} \le b$$

  III: Signaalin epäjatkuvuuskohtia on rajallinen määrä

  $$\lim_{\varepsilon \to 0} |s(t_0 + \varepsilon) - v(t_0 - \varepsilon)| \neq 0$$

  äärellisessä määrässä pisteitä välillä t∈(-1,1)

Fourier-muunnos

- On olemassa joukko signaaleita, jotka eivät täytä Dirichlet’n ehtoja, mutta niille voidaan kuitenkin esittää Fourier-muunnos siten, että muunnoksen yleiset ominaisuudet ovat voimassa.
  - Esim.
    - Impulssifunktio
    - Tasavirta
    - Askel- ja signmum-funktiot
    - Sini-signaali
- Näitä signaaleja kutsutaan ***yleistetyiksi signaaleiksi***. Yleistetyt signaalit ovat ***tehosignaaleja***

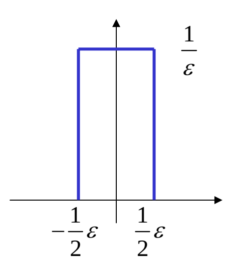
Impulssifunktio/Diracin delta-funktio

- Äärettömän kapea pulssi, jonka pinta-ala on 1.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1}$$

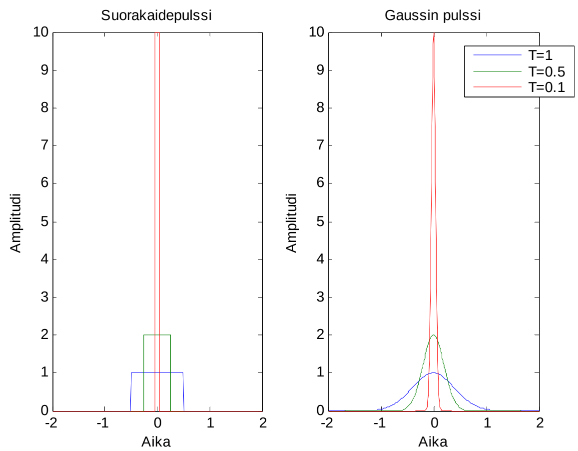
- Impulssifunktio δ(t) voidaan johtaa raja-arvona pulssista, jonka pituus on ε ja korkeus 1/ε, kun ε → 0.
- Suorakaidepulssin tapauksessa:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$



$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$

Impulssifunktio



Impulssifunktio

- Signaalin kertominen impulssifunktiolla

$$s(t)\delta(t-t_0)=s\left(t_0\right)\delta(t-t_0)$$

- Näytteenotto

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t-t_0)dt=s(t_0)$$

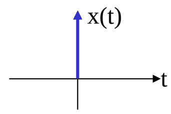
- Signaalin konvoluutio impulssifunktion kanssa (impulssivaste)

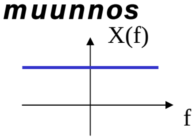
$$s(t)\otimes\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\delta(t-\tau)dt=s(t)$$

Impulssifunktion Fourier muunnos

- ***Impulssifunktion Fourier-muunnos***

$\boxed{F\{\delta(t)\}=1}$





Signaalin energia on jakaantunut tasan kaikille taajuuksille

  – Raja-arvona pulssin Fourier-muunnkosesta:

$$F\left\{\frac{1}{\varepsilon}\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\}=\mathrm{sinc}(f\varepsilon)$$

$$\boxed{F\left\{A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right\}=AT\mathrm{sinc}(fT)}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}F\left\{\frac{1}{\varepsilon}\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\}=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{sinc}(f\varepsilon)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin(\pi f\varepsilon)}{\pi f\varepsilon}=\mathrm{im}_{\varepsilon\to 0}\frac{\pi f\cos(\pi f\varepsilon)}{\pi f}=1$$

l'Hôpital

  – Raja-arvoja käyttäen suoraan F-muunnoksen määritelmästä:

$$\boxed{s(t)\delta(t-t_0)=s(t_0)\delta(t-t_0)}$$

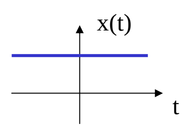
$$F\{\delta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-i2\pi ft}dt=\underbrace{e^{-i2\pi f0}}_{=1}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt}_{=1}=1$$

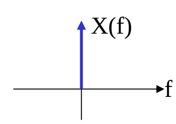
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1}$$

Impulssifunktion käänteismuunnos

- ***Impulssifunktion käänteismuunnos***

$\boxed{F^{-1}\{\delta(f)\}=1}$





Todistus

$$\boxed{F^{-1}\{\delta(f)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f)e^{i2\pi ft}df=\underbrace{e^{-i2\pi 0t}}_{=1}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f)\,dt}_{=1}=1}$$

- ***DC-komponentin (vakion) Fourier-muunnos***

$\boxed{F\{A\}=A\delta(f)}$

- ***Taajuussiirros***

$\boxed{F^{-1}\{\delta(f-f_0)\}=e^{i2\pi f_0 t}}$ ⟵ !

Todistus

$$\boxed{F^{-1}\{\delta(f-f_0)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f-f_0)e^{i2\pi ft}df=e^{i2\pi f_0 t}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(f-f_0)\,dt}_{=1}=e^{i2\pi f_0 t}}$$ ⟵ !

Sini-signaalin Fourier-muunnos

- Sinimuotoinen signaali

$$y(t) = A\cos(2\pi f_0 t dt + \phi) = \frac{A}{2}\left(e^{i2\pi f_0 t + i\phi} + e^{-i2\pi f_0 t - i\phi}\right)$$

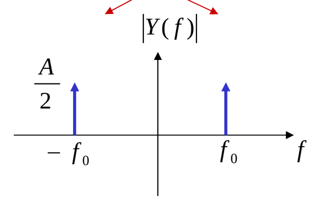
Eulerin kaavalla sinimuotoinen signaali voidaan kirjoittaa kahden osoittimen avulla, joita taajuustasossa vastaa taajuussiirros.

$$\boxed{\sin(t) = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) \qquad \cos(t) = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)}$$

$$\boxed{F^{-1}\{\delta(f - f_0)\} = e^{-i2\pi f_0 t}}$$

$$\boxed{Y(f) = \frac{A}{2}\left(\delta(f - f_0)e^{i\phi} + \delta(f + f_0)e^{-i\phi}\right)}$$

Spektri:



Jaksollisen signaalin Fourier-muunnos

- Jaksollinen signaali voidaan esittää Fourier-sarjan avulla

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \exp\left(i\frac{2\pi k}{T_0}t\right)$$

- Sovelletaan taajuussiirroksen Fourier-muunnosta

$$\boxed{F\{v(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k F\left\{\exp\left(i\frac{2\pi k}{T_0}t\right)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \delta\left(f - k\frac{1}{T_0}\right)} \qquad \boxed{F\left\{e^{i2\pi f_0 t}\right\} = \delta(f - f_0)}$$

Jaksollisen signaalin Fourier-muunnos saa nollasta poikkeavia arvoja ainoastaan harmonisilla taajuuksilla.

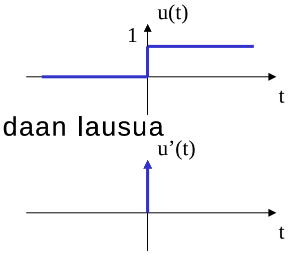
- *Integraali spektritiheyden yli antaa signaalin keskimääräisen tehon*

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(f)V^*(f)df = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k|^2 = P_v$$

Epäjatkuva-amplitudiset signaalit

- Askelfunktio u(t)

$$\boxed{u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}}$$



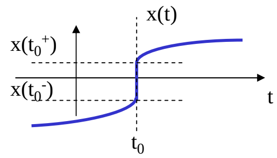
Epäjatkuvuuskohdan derivaatta voidaan lausua impulssifunktion avulla

$$\boxed{\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)}$$

Epäjatkuva-amplitudiset signaalit

- Epäjatkuvuuskohta ajanhetkellä t_0

$$\boxed{\frac{d}{dt}x(t) = \xi'(t) + \left[x\left(t_0^+\right) - x\left(t_0^-\right)\right]\delta\left(t - t_0\right)}$$



$\xi'(t)$ on signaalin jatkuvan termin derivaatta, joka täyttää Dirichlet'n ehdot

- Signaalin Fourier-muunnos saadaan integrointikeinon avulla

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{t} \left(\xi'(\tau) + \left[x\left(t_0^+\right) - x\left(t_0^-\right)\right]\delta\left(\tau - t_0\right)\right)d\tau}$$

$$\boxed{F\left\{\underbrace{\int_{-\infty}^{t}\ldots\int_{-\infty}^{\tau_1}}_{n \text{ kpl}} s(\tau_1)d\tau_1\ldots d\tau_n\right\} = \frac{1}{\left(i2\pi f\right)^n}S(f)}$$

$$\boxed{F\left\{x(t)\right\} = \frac{F\left\{\xi'(t)\right\} + \left(x\left(t_0^+\right) - x\left(t_0^-\right)\right)e^{-i2\pi f t_0}}{i2\pi f}}$$

Epäjatkuva-amplitudiset signaalit

- Monta epäjatkuvuuskohtaa

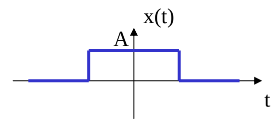
$$\frac{d}{dt}x(t) = \xi'(t) + \sum_k \Delta x(t_k)\delta\left(t - t_k\right)$$

$$\Delta x(t_k) = x\left(t_k^+\right) - x\left(t_k^-\right)$$

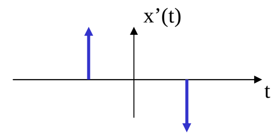
$$F\left\{x(t)\right\} = \frac{F\left\{\xi'(t)\right\} + \sum_k \Delta x(t_k) e^{-i2\pi f t_k}}{i2\pi f}$$

- Esimerkki
  - Pulssi

$$x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{1}{2}T \\ A & |t| \le \frac{1}{2}T \end{cases}$$



$$\frac{d}{dt}x(t) = A\delta\left(\tau + \frac{1}{2}T\right) - A\delta\left(\tau - \frac{1}{2}T\right)$$

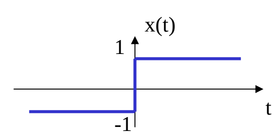


$$F\left\{x(t)\right\} = A\frac{e^{i2\pi f \frac{1}{2}T} - e^{-i2\pi f \frac{1}{2}T}}{i2\pi f} = AT\frac{\sin\left(\pi f T\right)}{\pi f T} = AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

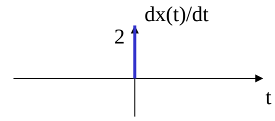
Signum-funktio

- Signmum-funktio

$$x(t) = \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



  - Ratkaistaan derivaatta



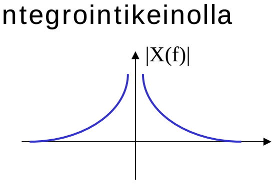
$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\mathrm{sgn}(t)$$

$$= \left[x(0^+) - x(0^-)\right]\delta(t) = \left[1 - (-1)\right]\delta(t) = 2\delta(t)$$

  - Derivaatan Fourier-muunnos tunnetaan, joten x(t):n Fourier-muunnos saadaan integrointikeinolla

$$F\left\{x(t)\right\} = \frac{1}{i2\pi f}F\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\}$$

$$= \frac{1}{i2\pi f}F\left\{2\delta(t)\right\} = \frac{1}{i\pi f}$$

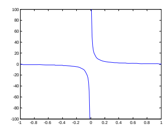


Signum-funktio

- Tarkistetaan tulos käänteismuuntamalla se

$$F^{-1}\left\{\frac{1}{i\pi f}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i\pi f}e^{i2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2\pi ft)}{i\pi f}df + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2\pi ft)}{i\pi f}df$$

$$= -i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2\pi ft)}{\pi f}df + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2\pi ft)}{\pi f}df$$



$v(t) = \dfrac{\cos(2\pi ft)}{\pi f}$ Funktio on pariton, joten (pinta-ala) integraali sen yli =0

$v(-t) = -v(t)$

$$F^{-1}\left\{\frac{1}{i\pi f}\right\} = 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2\pi ft)}{2\pi f}df = 2t\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}(2ft)\,df = \begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}(f')\,df' & t \geq 0\\ \displaystyle-\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}(f')\,df' & t < 0\end{cases}$$

$$= \operatorname{sgn}(t)\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}(f')\,df' = \operatorname{sgn}(t)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}(t)\,dt = 1}$$

Muuttujan vaihto

$$\boxed{f' = 2ft \Rightarrow df = \frac{1}{2t}df}$$

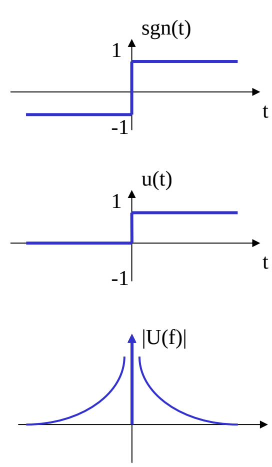
Yksikköaskelfunktio

- Askelfunktio voidaan esittää tasavirtakomponentin ja signum-funktion avulla

$$u(t) = \frac{1}{2}(1+\operatorname{sgn}(t)) = \begin{cases}0 & t \leq 0\\ 1 & t > 1\end{cases}$$

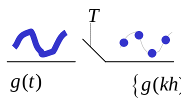
- Fourier-muunnos

$$\boxed{\begin{aligned}&F\{u(t)\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} + F\left\{\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}\end{aligned}}$$



Näytteenotto

- Tarkastellaan jatkuvaa signaalia $g(t)$ vain tiettyinä ajanhetkinä *kh*, $k \in \mathbb{Z}$



Nyquistin näytteenottoteoreema: Tarkastellaan kaistarajoitettua signaalia $g(t)$, jonka kaistanleveys on B. Jos näytteenotto taajuus $f_s = \frac{1}{h} \geq 2B$, niin $g(t)$ voidaan lausua näytteistetyn signaalin avulla $g(kh)$ avulla

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kh) \frac{\sin\left(\pi f_s (t-kh)\right)}{\pi f_s (t-kh)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kh) \operatorname{sinc}\left(f_s (t-kh)\right)$$

Näytteenotto

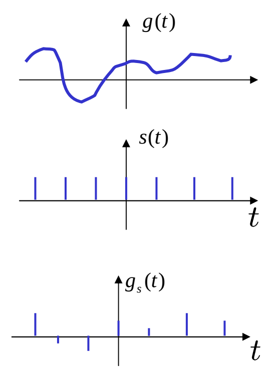
- Alkuperäinen signaali $g(t)$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f} dt$$

- Näytteistyssignaali $s(t)$

$$s(t) = \begin{cases} 1 & t = kh \\ 0 & muutoin \end{cases}$$

- Näytteistetty signaali $g_s(t)=g(t)s(t)$



Fourier-muunnos

$$G_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)s(t)e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kh) e^{-i2\pi ft} dt$$

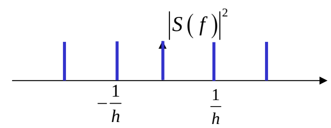
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kh) e^{-i2\pi fkh} \qquad \textbf{(1)}$$

Näytteenotto

- Näytteistyssignaali on periodinen, joten se voidaan lausua Fourier-sarjana

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \exp\left(i\frac{2\pi k}{h}t\right)$$

$$s_k = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} s(t)\exp\left(-i\frac{2\pi k}{h}t\right)dt = \frac{1}{h}$$



- Nyt näytteistetty signaali voidaan kirjoittaa muotoon

$$g_s(t) = g(t)s(t) = g(t)\frac{1}{h}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi k}{h}t}$$

- Fourier-muunnos (2)

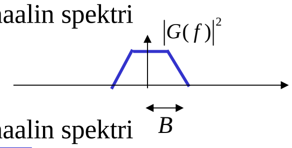
$$G_s(f) = \frac{1}{h}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{i\frac{2\pi k}{h}t}e^{-i2\pi ft}dt = \frac{1}{h}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i2\pi\left(f-\frac{k}{h}\right)t}dt = \frac{1}{h}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(f-\frac{k}{h}\right)$$

- Poissonin summakaava (1)&(2):

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kh)e^{-i2\pi fkh} = \frac{1}{h}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(f-\frac{k}{h}\right)}$$

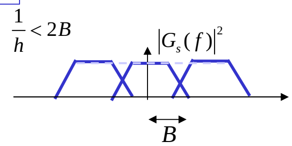
Näytteenotto

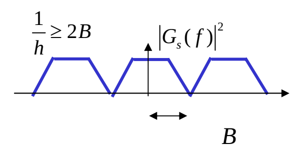
- Alkuperäisen signaalin spektri



- Näytteistetyn signaalin spektri

$$\boxed{G_s(f) = \frac{1}{h}\sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(f-\frac{k}{h}\right)}$$



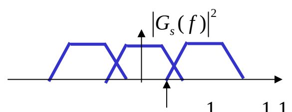


- Jos $\frac{1}{h} \geq 2B$, niin alkuperäinen signaali voidaan palauttaa näytteistetystä:

$$G(f) = \begin{cases} hG_s(f) & |f| \leq B \\ 0 & muutoin \end{cases}$$

Näytteenotto

- Jos $\frac{1}{h} < 2B$, niin Nyquistin taajuutta korkeammat taajuudet laskostuvat alemmille eikä alkuperäistä signaalia voida enää palauttaa.

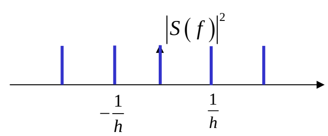


Nyquistin taajuus $f_N = \frac{1}{2} f_s = \frac{1}{2}\frac{1}{h}$

Näytteenotto

- Näytteistyssignaali $s(t)$

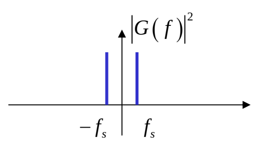
$$s(t) = \begin{cases} 1 & t = kh \\ 0 & muutoin \end{cases}$$



- Näytteistettävä signaali

$$g(t) = \cos(2\pi f_s t)$$

$$G(f) = \frac{1}{2}\left(\delta(f - f_s) + \delta(f + f_s)\right)$$



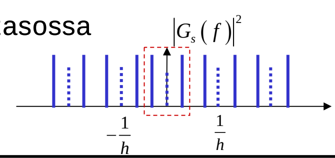
$f_s < \frac{1}{2h}$

- Näytteistetty signaali

$$g_s(t) = \cos(2\pi f_s t)s(t)$$

Kertolasku aikatasossa

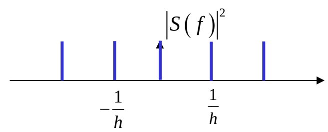
=> Kovoluutio taajuustasossa



Näytteenotto

- Näytteistyssignaali $s(t)$

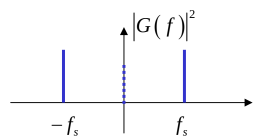
$$s(t)=\begin{cases}1 & t=kh\\ 0 & muutoin\end{cases}$$



- Näytteistettävä signaali

$$g(t)=\cos(2\pi f_s t)$$

$$G(f)=\frac{1}{2}\left(\delta(f-f_s)+\delta(f+f_s)\right)$$



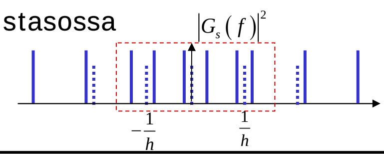
$$f_s > \frac{1}{2h}$$

- Näytteistetty signaali

$$g_s(t)=\cos(2\pi f_s t)\,s(t)$$

Kertolasku aikatasossa

=> Kovoluutio taajuustasossa



Näytteenotto

- Aliasointi ilmiö: Yli Nyquistin taajuuden oleva signaali, näyttää näytteistyksen jälkeen alemman taajuuden signaalilta.