

## Luento 5

---

- Diskreetti Fourier-muunnos
- Nopea Fourier-muunnos (FFT)

15.11.2007

1

## Diskreetti Fourier muunnos (DFT)

---

- Tarkastellaan diskreettiä sekvenssiä  $\{v_0, v_1, \dots, v_{N-1}\}$ 
  - Esim. Näytteistetty signaali  $v_n = v(nT)$ ,  $T$  näyteväli
- Diskreetti Fourier-muunnos (DFT)

$$V(k) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n e^{-i2\pi \frac{n}{N} k}$$

- Käänteismuunnos (IDFT)

$$v_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} V(k) e^{i2\pi \frac{n}{N} k}$$

15.11.2007

2

## DFT:n ominaisuuksia

- Parsevalin teoreema

$$\sum_{n=0}^{N-1} |v_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |V(k)|^2$$

Todistus

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} |v_n|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} v_n^* v_n = \sum_{n=0}^{N-1} v_n^* \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} V(k) e^{i2\pi \frac{n}{N} k} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} V(k) \sum_{n=0}^{N-1} v_n^* e^{i2\pi \frac{n}{N} k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} V(k) V^*(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |V(k)|^2 \end{aligned}$$

$$v_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} V(k) e^{i2\pi \frac{n}{N} k}$$

15.11.2007

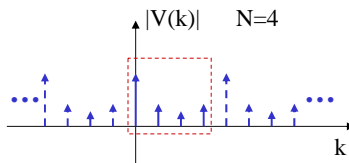
3

## DFT:n ominaisuuksia

- DFT on jaksollinen, jakson pituus on N:

$$V(k+N) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n e^{-i2\pi \frac{n}{N}(k+N)} = e^{-i2\pi n} \sum_{n=0}^{N-1} v_n e^{-i2\pi \frac{n}{N} k} = \sum_{n=0}^{N-1} v_n e^{-i2\pi \frac{n}{N} k} = V(k)$$

Huomataan, että  
 $\exp(-i2\pi n) = 1 \forall n \in \mathbb{N}$   
 joten  $V(N) = V(0)$



15.11.2007

4

## DFT:n ominaisuuksia

- Jos  $\{v_n\}$  on reaallinen, niin

$$V(-k) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n e^{-i2\pi \frac{n}{N}(-k)} = V^*(k)$$

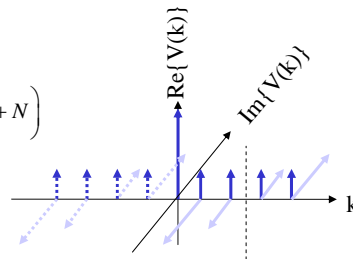
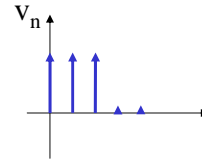
- Jaksollisuudesta seuraa

$$V\left(\frac{N}{2}-k\right) = V^*\left(\frac{N}{2}+k\right)$$

$$V(-l) = V^*(l), \quad l = k - \frac{N}{2}$$

$$V(k+N) = V(k)$$

$$V\left(\frac{N}{2}-k\right) = V^*\left(-\frac{N}{2}+k\right) = V^*\left(-\frac{N}{2}+k+N\right) = V^*\left(\frac{N}{2}+k\right)$$



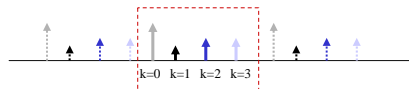
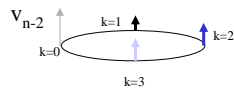
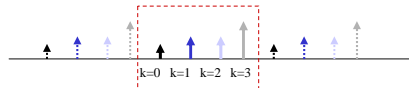
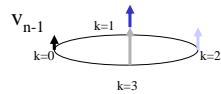
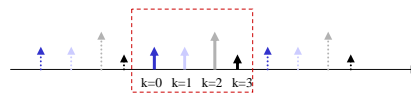
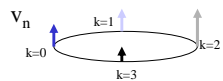
15.11.2007

5

## DFT:n ominaisuuksia

- Tarkastellaan diskreettiä jaksollista sekvenssiä

$$v_{n+N} = v_n$$



15.11.2007

6

## DFT:n ominaisuuksia

- Jaksollisen sekvenssin DFT voidaan laskea minkä tahansa  $N$  peräkkäisen näytteen yli

$$\sum_{n=m}^{N-1+m} v_n e^{-i2\pi \frac{n}{N}k} = V(k)$$

Todistus

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{N-1+m} v_n e^{-i2\pi \frac{n}{N}k} &= v_m e^{-i2\pi \frac{m}{N}k} + v_{m+1} e^{-i2\pi \frac{m+1}{N}k} + v_{N-1} e^{-i2\pi \frac{N-1}{N}k} + \dots \\ &+ v_N e^{-i2\pi \frac{N}{N}k} + v_{N+1} e^{-i2\pi \frac{N+1}{N}k} + \dots + v_{N-1+m} e^{-i2\pi \frac{N-1+m}{N}k} = \sum_{n=0}^{N-1} v_n e^{-i2\pi \frac{n}{N}k} \\ &\underbrace{v_N}_{v_0} \underbrace{e^{-i2\pi \frac{N}{N}k}}_1 + \underbrace{v_{N+1}}_{v_1} \underbrace{e^{-i2\pi \frac{N+1}{N}k}}_{e^{-i2\pi \frac{1}{N}k}} + \dots + \underbrace{v_{N-1+m}}_{v_{m-1}} \underbrace{e^{-i2\pi \frac{N-1+m}{N}k}}_{e^{-i2\pi \frac{m-1}{N}k}} \end{aligned}$$

$v_{n+N} = v_n$        $e^{i2\pi n} = 1, n \in \mathbb{N}$

15.11.2007

7

## DFT:n ominaisuuksia

- Origon siirto

$$F_D \{V(k-l)\} = v_n e^{i2\pi \frac{n}{N}l}$$

Todistus

$$\begin{aligned} F_D \{V(k-l)\} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} V(k-l) e^{i2\pi \frac{k}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{k=-l}^{N-1-l} V(k) e^{i2\pi \frac{k}{N}(k+l)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-l}^{N-1-l} V(k) e^{i2\pi \frac{k}{N}k} e^{i2\pi \frac{n}{N}l} = v_n e^{i2\pi \frac{n}{N}l} \end{aligned}$$

DFT:n jaksollisuudesta seuraa, että summa minkä hyvänsä  $N$ :n peräkkäisen näytteen yli antaa saman tuloksen.

$$\sum_{n=m}^{N-1+m} v_n e^{-i2\pi \frac{n}{N}k} = V(k)$$

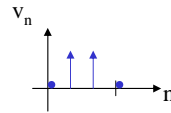
15.11.2007

8

## DFT

- Tarkastellaan diskreetin pulssin DFT:tä
  - Pulssi (N=4)

$$v_0 = 0, v_1 = 1, v_2 = 1, v_3 = 0$$



- DFT

$$V(k) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n e^{-i2\pi \frac{n}{N}k} = e^{-i2\pi \frac{1}{4}k} + e^{-i2\pi \frac{2}{4}k} = e^{-i\pi \frac{1}{2}k} + e^{-i\pi k}$$

$$= (-i)^k + (-1)^k$$

$$V(0) = 2$$

$$V(1) = -i - 1$$

$$V(2) = -1 + 1$$

$$V(3) = i - 1$$

15.11.2007

9

## Diskreetti konvoluutio

- Diskreetti jaksollinen konvoluutio** (Circular convolution)

$$y_n = h_n \otimes u_n = \sum_{m=0}^{N-1} h_m u_{n-m}$$

ja sen DFT

$$Y(k) = F_D \{h_n \otimes u_n\} = H(k)U(k)$$

- Diskreetti lineaarinen konvoluutio**

$$y_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m u_{n-m}$$

Oletetaan, että

$$h_n = 0, \quad n < 0 \vee n > N_h - 1$$

$$u_n = 0, \quad n < 0 \vee n > N_u - 1$$

Konvoluution pituus tulee olemaan  $N = N_h + N_u - 1$

15.11.2007

10

## Diskreetti konvoluutio

- Määritellään kaksi yhtä pitkää sekvenssiä lisäämällä nollia sekvenssien perään

$$h_{a,n} = \begin{cases} h_n & n = 0, 1, \dots, N_h - 1 \\ 0 & n = N_h, N_h + 1, \dots, N_h + N_u - 1 \end{cases}$$

$$u_{a,n} = \begin{cases} u_n & n = 0, 1, \dots, N_u - 1 \\ 0 & n = N_u, N_u + 1, \dots, N_h + N_u - 1 \end{cases}$$

- Jaksollinen konvoluutio:

$$y_n = \sum_{m=0}^{N_h+N_u-1} h_{a,m} u_{a,n-m}$$

- ja sen DFT:

$$Y(k) = H(k)U(k)$$

15.11.2007

11

## Diskreetti konvoluutio

- Tarkastellaan signaaleita (Näyteväli  $T=1$ )

- $\{h(nT)\} = \{1, 1, 1\}$   $N_h=3$

- $\{u(nT)\} = \{1, 1, 1, 1\}$   $N_u=4$

Augmentoidut signaalit

- $\{h(nT)\} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}$   $N_h+N_u-1=6$

- $\{u(nT)\} = \{1, 1, 1, 1, 0, 0\}$   $N_h+N_u-1=6$

- Konvoluutio

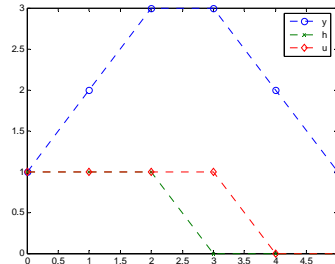
$$y_n = \sum_{m=0}^{N_h+N_u-1} h_{a,m} u_{a,n-m}$$

15.11.2007

12

## Esimerkki

```
h=[1 1 1];  
u=[1 1 1 1];  
ha=[h zeros(1,length(u)-1)];  
ua=[u zeros(1,length(h)-1)];  
H=fft(ha);  
U=fft(ua);  
Y=H.*U  
y=ifft(Y)  
plot(0:5,y,'o:',0:5,ha,'x:',0:5,ua,'d:');  
legend('y','h','u',1)
```



TAI

```
y=conv(h,u);
```

15.11.2007

13

## Esimerkki

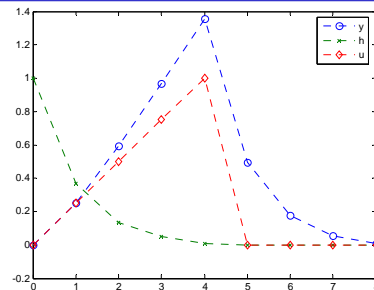
- Tarkastellaan signaaleita (Näyteväli  $T=1$ )
    - $\{h(nT)\} = \{1, e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, e^{-4}\}$   $N_h=5$
    - $\{u(nT)\} = \{0.25, .5, .75, 1\}$   $N_u=5$
- Augmentoidut signaalit
- $\{h(nT)\} = \{1, e^{-1}, e^{-2}, e^{-3}, e^{-4}, 0, 0, 0\}$   $N_h+N_u-1=9$
  - $\{u(nT)\} = \{0.25, .5, .75, 1, 0, 0, 0, 0\}$   $N_h+N_u-1=9$

15.11.2007

14

## Esimerkki

```
h=[1 exp(-1) exp(-2) exp(-3) exp(-5)];
u=[0 0.25 0.5 0.75 1];
Nh=length(h);
Nu=length(u);
N=Nh+Nu-1;
ha=[h zeros(1,N-length(h))];
ua=[u zeros(1,N-length(u))];
H=fft(ha);
U=fft(ua);
Y=H.*U;
y=ifft(Y);
plot(0:(N-1),y,'o',0:(N-1),ha,'x',0:(N-1),ua,'d');
legend('y','h','u',1)
```



15.11.2007

15

## Nopea Fourier-muunnos (FFT)

- Käyttäen DFT:n määritelmää  $k=0,1,2,\dots,N-1$  harmonisen laskemiseen tarvitaan  $N^2$  kompleksia kertolaskuoperaatiota ja  $N(N-1)$  kompleksia yhteenlaskuoperaatiota

$$V(k) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n e^{-i2\pi \frac{n}{N}k}$$

Jos  $N$  on suuri, on DFT:n laskeminen laskennallisesti raskasta.

- DFT:n laskeminen sisältää redundanteja operaatioita, joten laskentaa sopivasti järjestämällä voidaan laskentakuormaa pienentää. Tähän perustuu nopea Fourier-muunnos (FFT, Fast Fourier Transform)

15.11.2007

16



## Nopea Fourier-muunnos (FFT)

- Määritellään

$$W_N = \exp\left(\frac{-i2\pi}{N}\right)$$

- Osoittautuu, että

$$W_N^2 = \exp\left(\frac{-i2\pi}{N}2\right) = \exp\left(-i2\pi\frac{1}{\frac{N}{2}}\right) = W_{N/2}$$

$$\begin{aligned} W_N^{k+N/2} &= \exp\left(\frac{-i2\pi}{N}\left(k + \frac{N}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{-i2\pi}{N}k\right) \exp\left(-i2\pi\frac{N}{N2}\right) \\ &= -\exp\left(\frac{-i2\pi}{N}k\right) \\ &= -W_N^k \end{aligned}$$

15.11.2007

17

## Nopea Fourier-muunnos (FFT)

- Operaattorin  $W_N$  avulla DFT voidaan kirjoittaa muotoon

$$V(k) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n W_N^{nk}$$

- Oletetaan, että  $N$  on pariton kokonaisluku

$$V(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} v_{2n} W_N^{2nk}}_{\text{Parillinen sekvenssi}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} v_{2n+1} W_N^{(2n+1)k}}_{\text{Pariton sekvenssi}}$$

15.11.2007

18

## Nopea Fourier-muunnos (FFT)

- Nyt DFT voidaan kirjoittaa muotoon

$$V(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} v_{2n} W_{\frac{N}{2}}^{nk}}_{\text{(N-1)/2 point DFT}} + \underbrace{W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} v_{2n+1} W_{\frac{N}{2}}^{nk}}_{\text{(N-1)/2 point DFT}}$$

- Joten, voimme ratkaista N pisteen DFT:n lakemalla kaksi N/2 pisteen DFT:tä ja summaamalla tulokset
- Termi  $W_{N/2}^{nk}$  tarvitsee laskea vain kerran ja sitä voidaan käyttää sekä parillisten että parittomien symbolien DFT:ssä.
- Samalla tavalla N/2 pisteen DFT voidaan jakaa edelleen kahdeksi N/4 pisteen DFT:ksi, jotka puolestaan voidaan jakaa N/8 DFT:ksi jne.

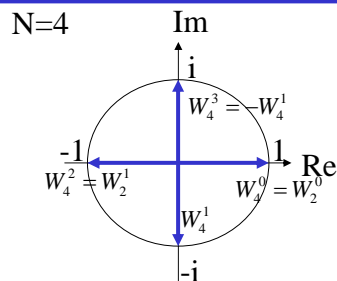
15.11.2007

19

## Nopea Fourier-muunnos (FFT)

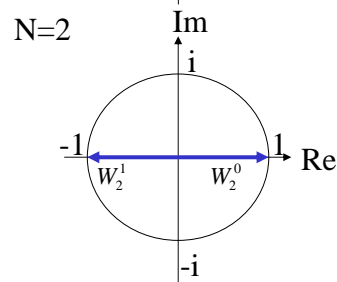
- N=4

$$W_4 = e^{-i2\pi\frac{1}{4}} = e^{-i\pi\frac{1}{2}}$$



- N=2

$$W_2 = e^{-i2\pi\frac{1}{2}} = e^{-i\pi}$$

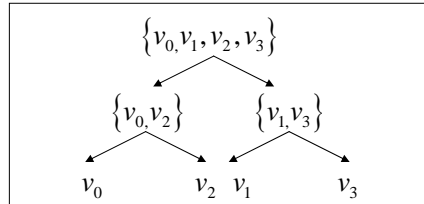


15.11.2007

20

## Nopea Fourier-muunnos (FFT) N=4

- N=4 pisteen sekvenssi
- Jaetaan sekvenssi parillisiin ja parittomiin



$$V(k) = V_1(k) = V_{11}(k) + W_4^k V_{12}(k), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$V_{11}(k) = v_0 + W_2^k v_2$$

$$V_{12}(k) = v_1 + W_2^k v_3$$

15.11.2007

21

## Nopea Fourier-muunnos (FFT) N=4

- Ensimmäinen vaihe: Kaksi 2 pisteen DFT:tä

$$V_{11}(k) = v_0 + W_2^k v_2$$

$$V_{11}(0) = v_0 + W_2^0 v_2 = v_0 + v_2$$

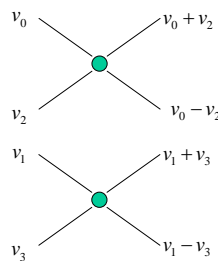
$$V_{11}(1) = v_0 + W_2^1 v_2 = v_0 - v_2$$

$$V_{12}(k) = v_1 + W_2^k v_3$$

$$V_{12}(0) = v_1 + W_2^0 v_3 = v_1 + v_3$$

$$V_{12}(1) = v_1 + W_2^1 v_3 = v_1 - v_3$$

Perhos-operaattori (butterfly operator)



15.11.2007

22

## Nopea Fourier-muunnos (FFT) N=4

- 2. vaihe

$$V(k) = V_1(k) = V_{11}(k) + W_4^k V_{12}(k)$$

$$V(0) = V_{11}(0) + W_4^0 V_{12}(0) = V_{11}(0) + V_{12}(0)$$

$$V(1) = V_{11}(1) + W_4^1 V_{12}(1) = V_{11}(1) - i V_{12}(1)$$

$$V(2) = V_{11}(2) + W_4^2 V_{12}(2) = V_{11}(2) - V_{12}(2) = V_{11}(0) - V_{12}(0)$$

$$V(3) = V_{11}(3) + W_4^3 V_{12}(3) = V_{11}(3) + i V_{12}(3) = V_{11}(1) + i V_{12}(1)$$

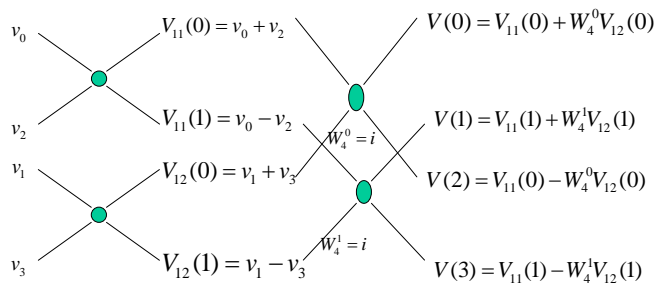
$$V(k + N) = V(k) \quad \text{1. vaiheen DFT:ssä } N=2$$

15.11.2007

23

## Nopea Fourier-muunnos (FFT) N=4

- N=4 DFT:



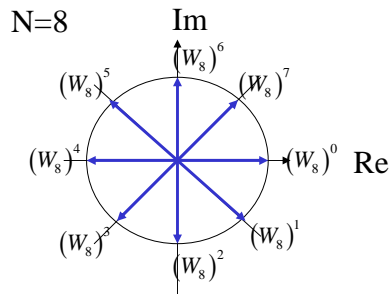
15.11.2007

24

## Nopea Fourier-muunnos (FFT) N=8

- N=8

$$W_N = e^{-i2\pi\frac{1}{N}}$$



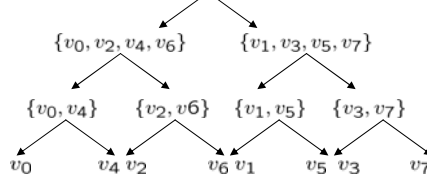
15.11.2007

25

## Nopea Fourier-muunnos (FFT) N=8

- N=8 pisteen sekvenssi

$$\{v(nT), n = 0, 1, \dots, 7, \} = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$



- N=8 pisteen DFT

$$V(k) = V_1(k) = V_{11}(k) + W_8^k V_{12}(k)$$

$$V_{11}(k) = V_{21}(k) + W_4^k V_{22}(k)$$

$$V_{12}(k) = V_{23}(k) + W_4^k V_{24}(k)$$

$$V_{21}(k) = v_0 + W_2^k v_4$$

$$V_{22}(k) = v_2 + W_2^k v_6$$

$$V_{24}(k) = v_3 + W_2^k v_7$$

$$V_{23}(k) = v_1 + W_2^k v_5$$

15.11.2007

26

## Nopea Fourier-muunnos (FFT) N=8

- Ensimmäinen vaihe 8 pisteen DFT:stä

$$V_{21}(0) = v_0 + W_2^0 v_4 = v_0 + v_4 \quad V_{21}(1) = v_0 + W_2^1 v_4 = v_0 - v_4$$

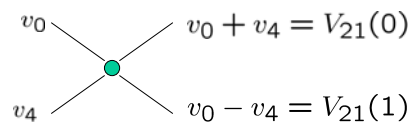
$$V_{22}(0) = v_2 + W_2^0 v_6 = v_2 + v_6 \quad V_{22}(1) = v_2 + W_2^1 v_6 = v_2 - v_6$$

$$V_{23}(0) = v_1 + W_2^0 v_5 = v_1 + v_5 \quad V_{23}(1) = v_1 + W_2^1 v_5 = v_1 - v_5$$

$$V_{24}(0) = v_3 + W_2^0 v_7 = v_3 + v_7 \quad V_{24}(1) = v_3 + W_2^1 v_7 = v_3 - v_7$$

$$W_2^n = \exp(-i\pi n) = \begin{cases} -1 & n=1,3,\dots \\ 1 & n=0,2,\dots \end{cases}$$

- Perhosoperaattori (butterfly operator)



15.11.2007

27

## Nopea Fourier-muunnos (FFT) N=8

- Perhosoperaattorin avulla

$$v_0 \quad v_4 \quad V_{21}(0)$$

$$V_{21}(1)$$

$$v_2 \quad v_6 \quad V_{22}(0)$$

$$V_{22}(1)$$

$$v_1 \quad v_5 \quad V_{23}(0)$$

$$V_{23}(1)$$

$$v_3 \quad v_7 \quad V_{24}(0)$$

$$V_{24}(1)$$

$$V_{21}(0) = v_0 + W_2^0 v_4 = v_0 + v_4 \quad V_{21}(1) = v_0 + W_2^1 v_4 = v_0 - v_4$$

$$V_{22}(0) = v_2 + W_2^0 v_6 = v_2 + v_6 \quad V_{22}(1) = v_2 + W_2^1 v_6 = v_2 - v_6$$

$$V_{23}(0) = v_1 + W_2^0 v_5 = v_1 + v_5 \quad V_{23}(1) = v_1 + W_2^1 v_5 = v_1 - v_5$$

$$V_{24}(0) = v_3 + W_2^0 v_7 = v_3 + v_7 \quad V_{24}(1) = v_3 + W_2^1 v_7 = v_3 - v_7$$

15.11.2007

28

## Nopea Fourier-muunnos (FFT) N=8

- Toinen vaihe 8 pisteen DFT: stä

$$V_{11}(0) = V_{21}(0) + W_4^0 V_{22}(0) = V_{21}(0) + V_{22}(0)$$

$$V_{11}(1) = V_{21}(1) + W_4^1 V_{22}(1) = V_{21}(1) + e^{-i\frac{\pi}{2}} V_{22}(1) = V_{21}(1) - iV_{22}(1)$$

$$V_{11}(2) = V_{21}(2) + W_4^2 V_{22}(2) = V_{21}(2) + e^{-i\pi} V_{22}(2) = V_{21}(2) - V_{22}(2) = V_{21}(0) - V_{22}(0)$$

Huomataan, että  $V_{2i}(k)$  on 2 pisteen DFT, joten  $V_{2i}(k+2) = V_{2i}(k)$

$$V_{11}(3) = V_{21}(3) + W_4^3 V_{22}(3) = V_{21}(3) + e^{-i\frac{3\pi}{2}} V_{22}(3) = V_{21}(1) + iV_{22}(1)$$

– Koska  $W_8^0 = 1$  and  $W_8^2 = W_4$ , niin

$$V_{11}(0) = V_{21}(0) + W_8^0 V_{22}(0)$$

$$V_{11}(2) = V_{21}(0) - W_8^0 V_{22}(0)$$

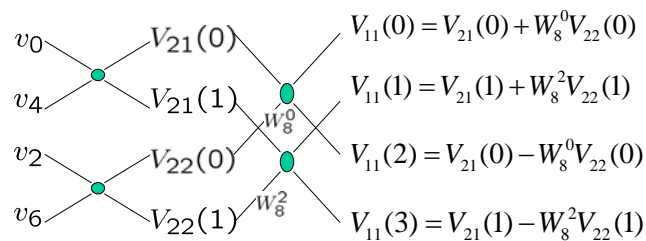
$$V_{11}(1) = V_{21}(1) + W_8^2 V_{22}(1)$$

$$15.11.2007 \quad V_{11}(3) = V_{21}(1) - W_8^2 V_{22}(1)$$

29

## Nopea Fourier-muunnos (FFT) N=8

- Toinen vaihe 8 pisteen DFT: stä



15.11.2007

30

## Nopea Fourier-muunnos (FFT) N=8

- Kolmas vaihe 8 pisteen DFT:stä

$$V_1(k) = V_{11}(k) + W_8^k V_{12}(k)$$

$$V_1(0) = V_{11}(0) + W_8^0 V_{12}(0)$$

$$V_1(1) = V_{11}(1) + W_8^1 V_{12}(1)$$

$$V_1(2) = V_{11}(2) + W_8^2 V_{12}(2)$$

$$V_1(3) = V_{11}(3) + W_8^3 V_{12}(3)$$

$$V_1(4) = V_{11}(0) - W_8^0 V_{12}(0)$$

$$V_1(5) = V_{11}(1) - W_8^1 V_{12}(1)$$

$$V_1(6) = V_{11}(2) - W_8^2 V_{12}(2)$$

$$V_1(7) = V_{11}(3) - W_8^3 V_{12}(3)$$

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

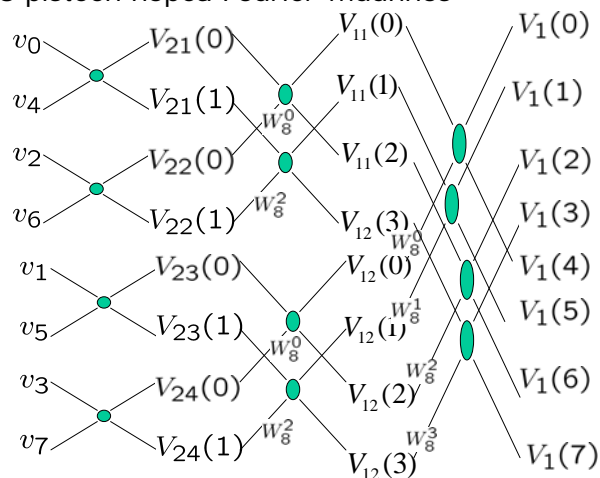
$$V(k+N) = V(k)$$

15.11.2007

31

## Nopea Fourier-muunnos (FFT) N=8

- 8 pisteen nopea Fourier-muunnos



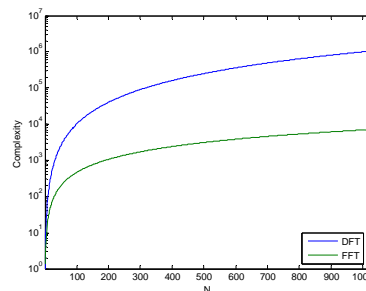
15.11.2007

32



## Nopea Fourier-muunnos (FFT)

- Laskennallinen kompleksisuus:
  - DFT:  $O(N^2)$
  - FFT:  $O(N \log(N))$



15.11.2007

33

## Nopea käänteismuunnos: IFFT

- Käänteismuunnos voidaan kirjoittaa muotoon

$$v_n = \sum_{k=0}^{N-1} V(k) W_N^{-nk} = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} V(2k) W_N^{-2nk} + \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} V(2k+1) W_N^{-(2n+1)k} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} V(2k) W_N^{-nk}}_{\text{N/2 pisteen IDFT}} + W_N \underbrace{\frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} V(2k+1) W_N^{-nk}}_{\text{N/2 pisteen IDFT}} \right)$$

N/2 pisteen  
IDFT

- Eli, kuten FFT:n tapauksessa, myös IFFT:n tapauksessa tehtävä voidaan jakaa osiin.
- IFFT eroaa FFT:stä ainoastaan eksponentin merkin ja skaalaustekijän  $1/N$  osalta.

15.11.2007

34

## Fourier-muunnoksen numeerinen approksimointi

- Fourier-muunnos

$$V(f) = \mathcal{F}\{v(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} v(t) \exp(-i2\pi ft) dt$$

- Tarkastellaan signaali, joka on määritelty välille  $[0, T_1]$

$$V(f) = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{N-1} v(nT) \exp(-i2\pi fnT) T \quad (\text{Euler integral})$$

missä  $N = T_1/T$

- Fourier-muunnosta voidaan siis approksimoida DFT:llä:

$$V(f) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} v(nT) e^{-i2\pi fn} = TV_D(k), \quad f = \frac{k}{NT}$$

$$V_D(k) = \sum_{n=0}^{N-1} v(nT) e^{-i2\pi \frac{n}{N} k}$$

15.11.2007

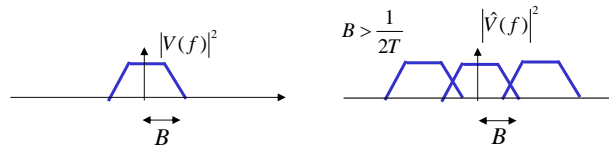
35

## Fourier-muunnoksen numeerinen approksimointi

- Poissonin summakaava

$$\hat{V}(f) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(nT) e^{-i2\pi fn} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Jos alkuperäisen signaali sisältää Nyquistin rajataajutta ( $1/2 \cdot 1/T$ ) suurempia taajuuksia, tapahtuu näytteenotossa laskostumista. Tämä vääristää approksimoitua spektriä.

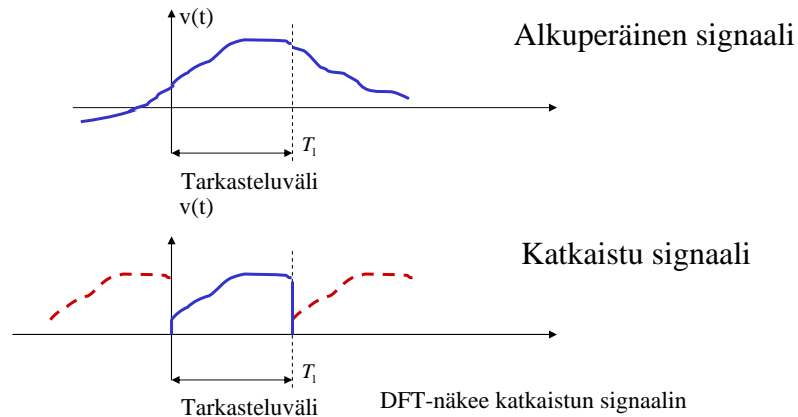


15.11.2007

36

## Ikkunointi ja vuotoilmiö

- Signaalin katkaisu



DFT-näkee katkaistun signaalin periodisena. Jos päätepisteiden välillä on suuria eroja syntyy näytteistettyyn signaaliin korkeita taajuuksia

15.11.2007

37

## Ikkunointi ja vuotoilmiö

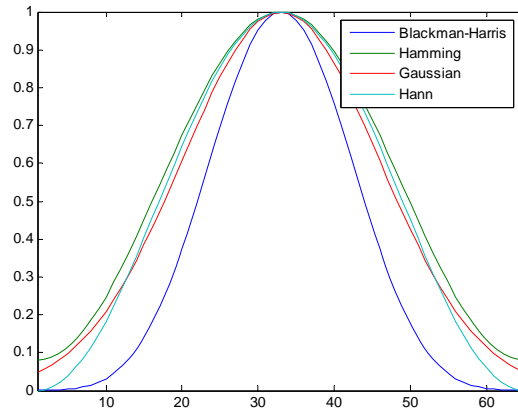
- Suorakaiteenmuotoisen aikaikkunan käyttö aiheuttaa DFT:n näkemään jaksolliseen signaaliin epäjatkuvuuskohtia, joita selittämään Fourier-sarjassa tarvittaisiin korkeita taajuuksia.
- Suorakaide pulssilla katkaistun signaalin FFT voi tästä johtuen erota suurestikin vastaavan jatkuvan signaalin Fourier-muunnoksesta.
- Suorakaidemuotoisten ikkunoiden sijaan, käytetään usein ikkunoita, jotka pienentävät tarkasteluvälin alku ja loppupään näytteiden arvoja.

15.11.2007

38

## Ikkunointi ja vuotoilmiö

- Erilaisia ikkunoita on määritelty useita:

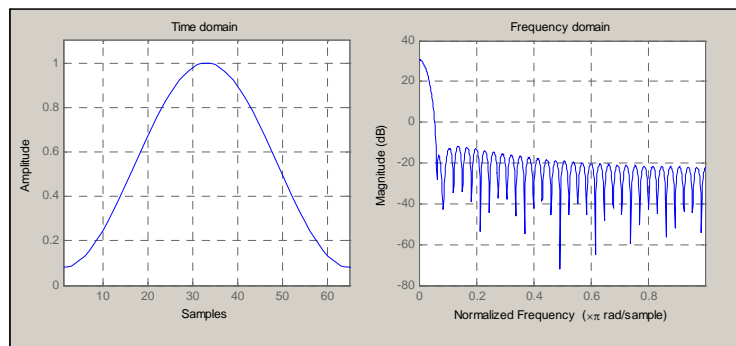


15.11.2007

39

## Hamming ikkuna aika ja taajuustasossa

$N=65$ ;  $w=\text{hamming}(N)$ ;  $\text{wvtool}(w)$

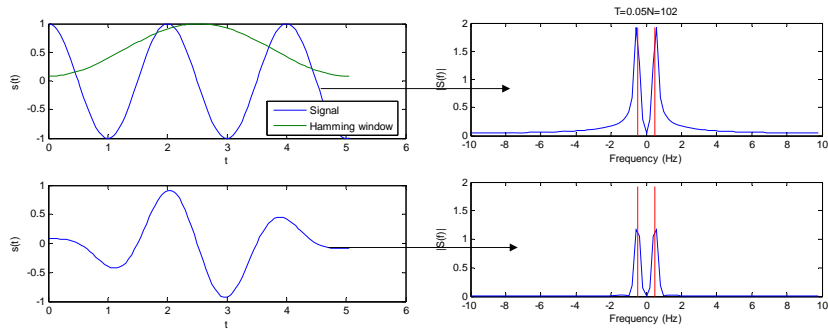


15.11.2007

40

## Esimerkki

- Kosinisisignaalin spektritiheys



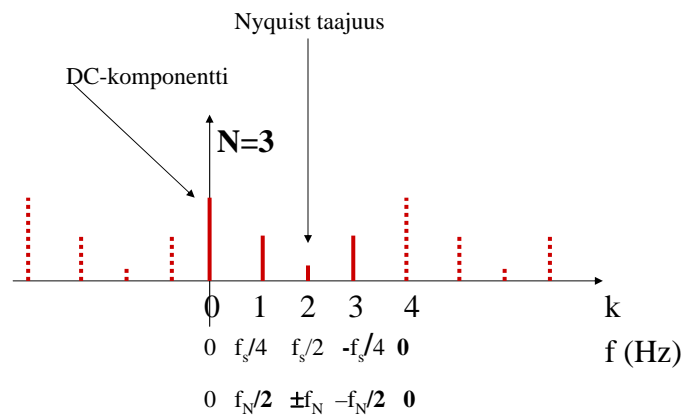
Ikkunointi vähentää spektrien laskoistumisesta johtuvaa virhettä.

15.11.2007

41

## Fourier-muunnoksen numeerinen approksimointi

- Taajuusalue
  - Näytteenoton jälkeen signaali sisältää taajuuksia Nyquistin rajataajuuteen saakka



15.11.2007

42

## Fourier-muunnoksen numeerinen approksimointi

- **Taajuusresoluutio:** FFT:n lasketut harmoniset taajuudet ovat

$$f = \frac{k}{N}f_s, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$f_s$  Näytteenottotaajuus

$\frac{1}{N}f_s$  Taajuusresoluutio

- **Zero padding:** Lisäämällä nollia sekvenssin perään saadaan taajuusresoluutiota kasvatettua. Tällöin FFT interpoloi välitaajuuksia alkuperäisen DFT:n määrittämien taajuuksien väliin.

– Jos lisätään  $N_0$  nollaa, niin taajuusresoluutioksi tulee

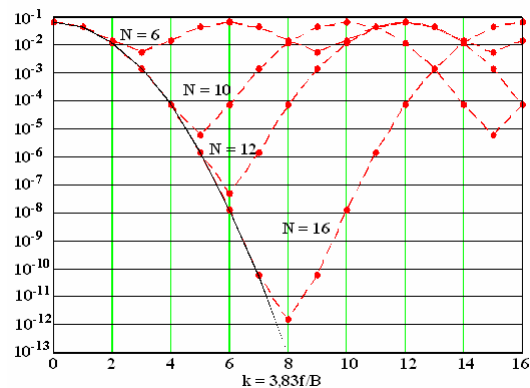
$$\frac{1}{N + N_0}f_s < \frac{1}{N}f_s$$

15.11.2007

43

## Esimerkki

Fourier-muunnos ja DFT Gaussin pulssista

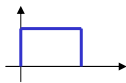


15.11.2007

44

## Esimerkki

- Tarkastellaan pulssia

$$v(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$


- Valitaan näyteväli  $T=0.1$

$$\{v(nT), n = 0, 1, 2, \dots, 9\} = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$



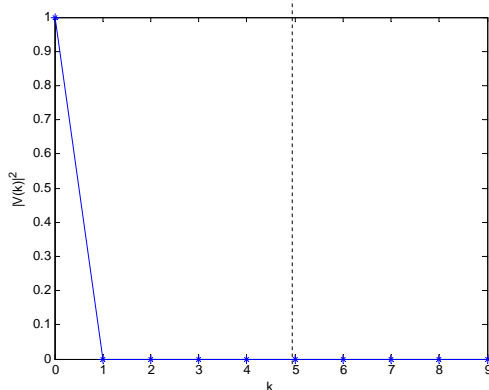
- Näytteenottotaajuus  $f_s = 10$  Hz ja Nyquistin rajataajuus  $f_N = 5$  Hz.
- Taajuusväliksi tulee  $N=10$  näytteellä  $1/N * f_s = 1/10 * 10 \text{ Hz} = 1 \text{ Hz}$

15.11.2007

45

## Esimerkki

- FFT löytää vain pulssin DC-komponentin  
 $k=5: f_N=5 \text{ Hz}$



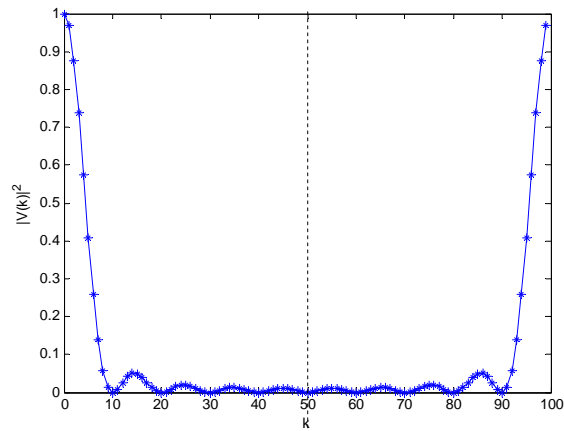
15.11.2007

Taajuusväli =  $10\text{Hz}/10=1 \text{ Hz}$

46

## Esimerkki

- Lisätään 90 nollaa sekvenssin perään



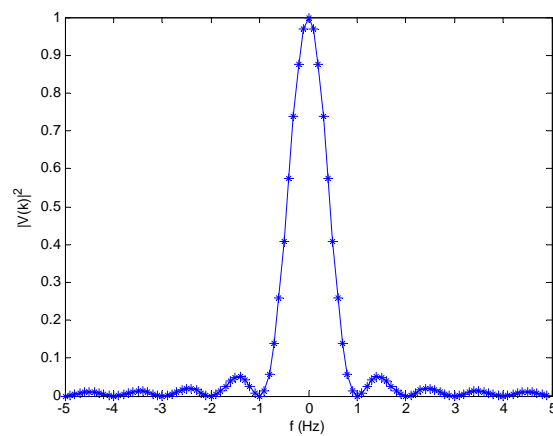
15.11.2007

Taajuusväli =  $10\text{Hz}/100=0.1\text{ Hz}$

47

## Example

- Taajuuden funktiona saadaan



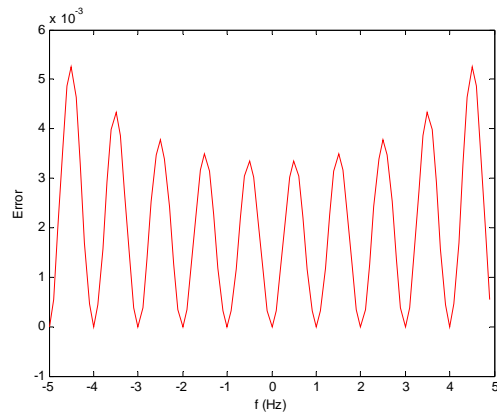
15.11.2007

48



## Esimerkki

- Koska pulssi sisälsi myös Nyquistin rajataajutta suurempia taajuuskomponentteja tapahtuu laskostumista



15.11.2007

49

## Esimerkki

```
tau=1;           %Pulse width
T=0.1;          %Sampling interval
f_s=1/T;        %Sampling frequency
f_N=1/2*f_s;    %Nyquist frequency
df=f_s/N;       %Frequency spacing
N=tau/T;        %Number of samples
v=ones(N,1);    %Sampled signal
V=T*fft(v);     %Approximate continuous Fourier transform
%Plot spectrum density
figure(1)
plot(0:(N-1),abs(V).^2,'*-')
xlabel('k')
ylabel('|V(k)|^2')

%Zero padding
Nz=90;
z=zeros(Nz,1);
Na=N+Nz;
Va=[v z]; %Zero padding
Va=T*fft(v);
figure(2)
plot(0:(Na-1),abs(Va).^2,'*-')
xlabel('k')
ylabel('|V(k)|^2')

%Frequency axis
dfa=f_s/Na; %frequency spacing after zero padding
f=f_N-dfa:(f_N-dfa+dfa):f_N-dfa;
figure(3)
plot(f,abs(fftshift(Va)).^2,'*-')
xlabel('f (Hz)')
ylabel('|V(k)|^2')

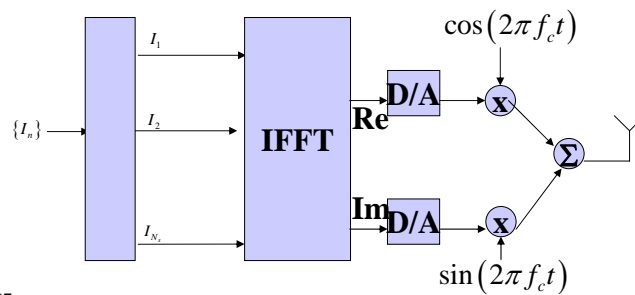
%Effect of aliasing
figure(4)
plot(f,abs(fftshift(Va)).^2-sinc(f).^2,'r')
xlabel('f (Hz)')
ylabel('error')
```

15.11.2007

50

## OFDM

- Lähetetään  $N_s$  kappaletta  $T$ :n pituisia symboleita  $I_k$  rinnakkain taajuustasossa kukin omalla kanavallaan.
- Minimoidaan kanavien taajuusvälit siten, että kanavat säilyvät keskenään ortogonaalisina. Eli, samanaikaisesti lähetettävät symbolit eivät häiritse toisiaan.

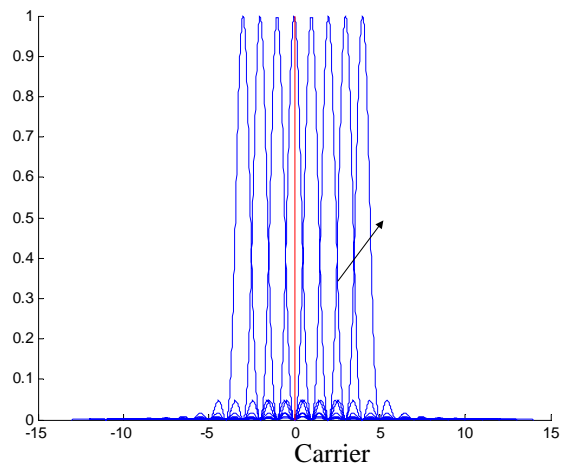


15.11.2007

51

## OFDM

OFDM moduloidun signaalin spektri  $N_s = 8$

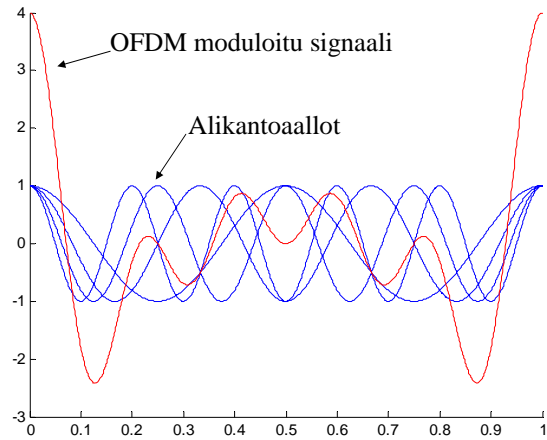


15.11.2007

52

# OFDM

$N_s = 4$   
 $f_c = 4 \text{ Hz}$

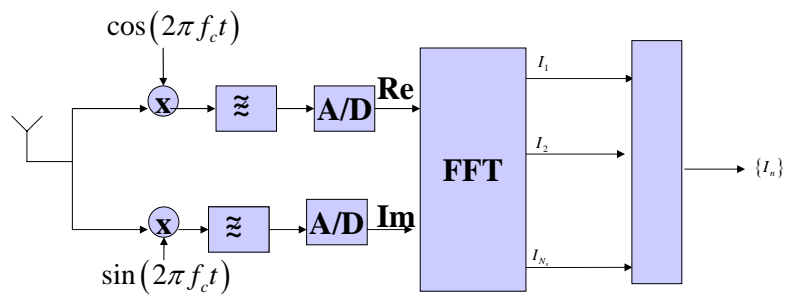


15.11.2007

53

# OFDM

- Vastaanotin perustuu FFT-muunnokseen



15.11.2007

54