

Luento 6

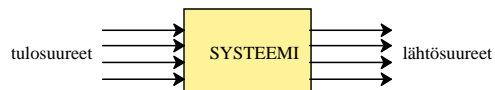
- Järjestelmän (systeemin) käsite ja luokitukset
- Lineaarinen aika invariantti järjestelmä
 - Impulssivaste
 - Siirtofunktio
 - Stabiilisuus
- Järjestelmien kokoaminen osista

22.11.2007

1

Järjestelmät

- Järjestelmä / Systeemi / Prosessi on objekti, joka määrittää relaatiot signaalijoukon välillä.
- Järjestelmän signaalit jaetaan usein tulosuureisiin ja lähtösuureisiin
- Tulosignaalit ovat järjestelmästä riippumattomia
 - Lähtösignaalit sisältävät järjestelmän tuottamaa informaatiota.
 - Tyypillisesti järjestelmä reagoi lähtösignaaleihin ja tuottaa niiden perusteella lähtösignaalit. Tällöin tulo- ja lähtösignaalien välillä vallitsee kausaalisuus.

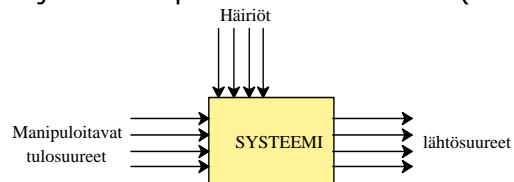


22.11.2007

2

Järjestelmät

- Järjestelmän tulosuuret jaetaan usein manipuloitaviin suureisiin ja ei-manipuloitaviin suureisiin (häiriöt)



- Järjestelmiä voidaan luokitella niiden tulo- ja lähtösuureiden määrien mukaan
 - SISO Single Input-Single Output
 - MISO Multiple Input - Single Output
 - SIMO Single Input - Multiple Output
 - MIMO Multiple Input - Multiple Output

22.11.2007

3

Järjestelmät

- Järjestelmä voidaan ajatella operaattoriksi $F(\cdot)$, joka kuvaa tulosuureen lähtösuureeksi. (vrt. matriisilla \mathbf{A} kertominen on kuvaus vektorilta \mathbf{x} vektorille $\mathbf{y}=\mathbf{Ax}$)
- Esimerkkejä järjestelmä-operaattoreista:

$$F(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)dt \quad \text{Konvoluutiointegraali}$$

$$F(x(t)) = x(t) \cos(2\pi f_c t) \quad \text{Lineaarinen modulaatio}$$

22.11.2007

4

Järjestelmät

- Prosessi on **kausallinen**, jos vasteen $y(t)$:n ratkaisemiseksi ajanhetkellä t ei tarvita herätteen tulevia arvoja $u(\tau)$, $\tau \geq t$
- **Jatkuva-aikainen prosessi**: Sekä tulo- että lähtösuureet ovat jatkuva-aikaisia signaaleja
 $y(t)=F(u(t))$
- **Diskreetti-aikainen prosessi**: Sekä tulo- että lähtösuureet ovat diskreettiaikaisia signaaleja
 $y(k)=F(u(k))$

22.11.2007

5

Järjestelmät

- **Lineaarinen järjestelmä**: Järjestelmän toiminta ei riipu herätteen amplitudista ja vaiheesta. Sen kuvaamiseen riittää lineaarinen operaattori F :
 $F(ax(t)+bu(t))=aF(x(t))+bF(u(t))$
Esim. Passiivisista komponenteista koostuva sähköpiiri
- **Epälineaarinen järjestelmä**: Järjestelmän generoima vaste riippuu herätteen amplitudista ja tai vaiheesta
 $\exists a \in \mathbb{C}: F(ax(t)) \neq aF(x(t))$
Esim. Tehovahvistin

22.11.2007

6

Järjestelmät

- **Deterministinen järjestelmä**
 - Jos järjestelmän tila tunnetaan tietyssä ajanhetkenä voidaan sen vaste ennustaa tarkasti tunnetulle herätteelle.
Esim. Elektroninen tai mekaaninen järjestelmä
 - **Aika invariantti järjestelmä:** Järjestelmän toiminta ei riipu ajasta.
 - **Aijan suhteen muuttuva järjestelmä:** Järjestelmän toiminta muuttuu ajan funktiona. Sen vaste siis riippuu siitä minä ajanhetkenä heräte järjestelmään syötetään.
- **Stokastinen satunnainen järjestelmä / prosessi**
 - Vaikka järjestelmän tila tietyssä ajanhetkenä tunnettaisiin, ei sen vastetta tunnetulle herätteelle voida ennustaa vaan se on satunnainen.
Esim. Radiokanava
 - **Stationäärinen stokastinen prosessi:** Prosessin tilastolliset ominaisuudet eivät riipu ajasta.
 - **Epästationäärinen prosessi:** Prosessin tilastolliset ominaisuudet vaihtelevat ajan mukaan.

22.11.2007

7

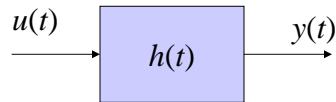
Stabiilisuus

- Deterministinen järjestelmä on BIBO (bounded input – bounded output) **stabiili**, jos amplitudirajoitetun herätteen vaste on amplitudirajoitettu
$$|x(t)| < \infty \Rightarrow |F(x(t))| < \infty \quad \forall t$$
- Jos on olemassa $|x(t)| < \infty$ siten, että $|F(x(t))| \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$, mutta amplitudi rajoitetun sini-muotoisen signaalin vaste on amplitudirajoitettu sini-muotoinen signaali
$$x(t) = A \cos(2\pi ft + \phi), \quad |A| < \infty \Rightarrow |F(x(t))| < \infty \quad \forall t$$
järjestelmää kutsutaan **marginäälisti stabiiliksi**.
- Muutoin järjestelmää kutsutaan **epästabiiliksi**.

22.11.2007

8

Lineaarinen aikainvariantti järjestelmä



- Jatkuva-aikaisen LTI-järjestelmän toimintaa kuvaa lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) = -a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) - \dots - a_n y(t) + b_0 \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \dots + b_m u(t)$$

jossa n on järjestelmän *kertaluku*

- Jos $m \leq n$, niin järjestelmä on **aito** (*proper*): Vaste ei riipu herätteen derivaatasta d/dt $u(t)$
- Jos $m < n$, niin järjestelmä on **vahvasti aito** (*strictly proper*): Tulosuuren u arvo ajanhetkellä t , $u(t)$, ei vaikuta lähtösuureen y arvoon ajanhetkellä t , $y(t)$.

22.11.2007

9

LTI-järjestelmät

- Yleinen esitystapa

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^k u(t)}{dt^k}$$

- Jos $m < n$, niin määritellään $b_k = 0$, $k = m+1, m+2, \dots, n$
- Aikaderivaattaa merkitään usein pisteellä

$$\dot{v}(t) = \frac{d}{dt} v(t)$$

$$\ddot{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2} v(t)$$

$$v^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} v(t)$$

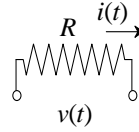
22.11.2007

10

Sähköpiirien peruskomponentit

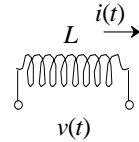
- Vastus (resistanssi)

$$v(t) = Ri(t)$$



- Kela (induktanssi)

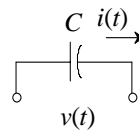
$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$



- Kondensaattori (kapasitanssi)

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{i_0}^t i(t) dt$$



22.11.2007

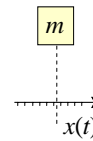
11

Mekaanisten järjestelmien peruskomponentit

Etenevä liike:

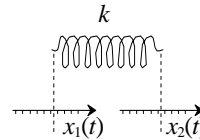
- Massakappale (inertia)

$$F_m(t) = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$



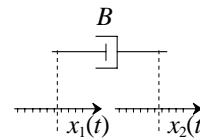
- Jousi

$$F_k(t) = k \Delta x(t) = k(x_1(t) - x_2(t))$$



- Vaimennin

$$F_b(t) = B \frac{d\Delta x(t)}{dt} = B \left(\frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt} \right)$$



22.11.2007

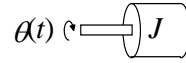
12

Mekaanisten järjestelmien peruskomponentit

Pyörivä liike:

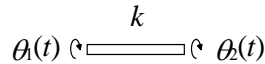
- Hitausmomentti

$$T_J(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$



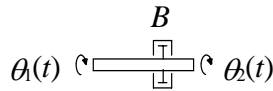
- Vääntöjousi

$$T_k(t) = k\Delta\theta(t) = k(\theta_1(t) - \theta_2(t))$$



- Vääntövaimennin

$$T_b(t) = B \frac{d\Delta\theta(t)}{dt} = B \left(\frac{d\theta_1(t)}{dt} - \frac{d\theta_2(t)}{dt} \right)$$



22.11.2007

13

Virtausjärjestelmien peruskomponentit

- Läpivirtaussäiliö

$$\frac{dV(t)}{dt} = F_1(t) - F_2(t)$$

- Ideaalisekoitin

$$\frac{dV(t)C_2(t)}{dt} = F_1(t)C_1(t) - F_2(t)C_2(t)$$

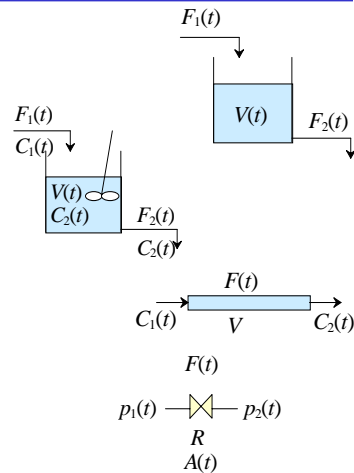
- Putkiviive

$$C_2(t) = C_1(t - T_d(t)) = C_1 \left(t - \frac{V}{F(t)} \right)$$

- Virtaus aukon läpi

$$F(t) = A(t)R\sqrt{\Delta p(t)} = A(t)R\sqrt{p_1(t) - p_2(t)}$$

Tämä on esimerkki epälineaarista komponentista

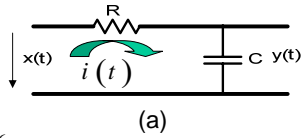


22.11.2007

14

Esimerkki 1

- Jännite $x(t)$ on tulosuure ja jännite $y(t)$ lähtösuure

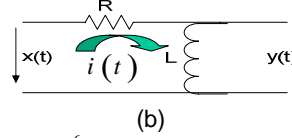


$$\begin{cases} i(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \\ x(t) = Ri(t) + y(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i(t) = \frac{x(t) - y(t)}{R} \\ \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} y(t) + \frac{1}{RC} x(t)$$

Vahvasti aito järjestelmä



$$\begin{cases} y(t) = L \frac{di(t)}{dt} \\ x(t) = Ri(t) + y(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i(t) = \frac{x(t) - y(t)}{R} \\ y(t) = L \frac{di(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{L}{R} \left(\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right)$$

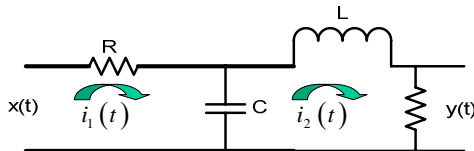
$$\Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = -\frac{R}{L} y(t) + \frac{dx(t)}{dt}$$

Aito järjestelmä

15

Esimerkki 2

- Jännite $x(t)$ on tulosuure ja jännite $y(t)$ lähtösuure



$$x(t) = Ri_1(t) + \frac{1}{C} \int [i_1(t) - i_2(t)] dt \Rightarrow -\frac{dx(t)}{dt} + R \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{i_1(t) - i_2(t)}{C} = 0$$

$$x(t) = Ri_1(t) + L \frac{di_2(t)}{dt} + y(t) = 0, \quad y(t) = i_2(t)R$$

- Järjestelmää kuvaa nyt 2. asteen differentiaaliyhtälö

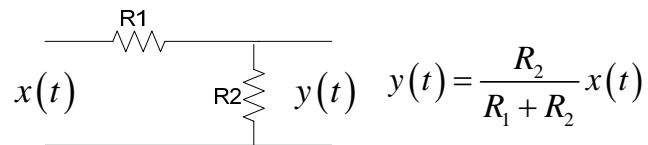
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{dy(t)}{dt} + \frac{2}{LC} y(t) = \frac{1}{LC} x(t)$$

22.11.2007

16

LTI-järjestelmät

- Sähköpiiriä kuvaavien differentiaaliyhtälöiden asteluku viittaa niissä esiintyvien varstoelementtien (kondensaattori ja kela) lukumäärään.
- Jos piirissä ei ole varstoelementtejä, sitä kutsutaan muistittomaksi.
- Esimerkki muistittomasta piiristä:



22.11.2007

17

Laplace-muunnos

- Signaali on **kausallinen**, jos $v(t)=0$, kun $t<0$.
- Kausaalisen signaalin *Fourier-muunnos*

$$V(f) = \mathcal{F}\{v(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} v(t) \exp(-i2\pi ft) dt$$

- Kausaalisen signaalin *Laplace-muunnos*

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} v(t) \exp(-st) dt \quad s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$$

- Jos Laplace muunnos konvergoituu alueessa $\text{Re}\{s\} \geq 0$, saadaan siitä Fourier muunnos valitsemalla $s=i2\pi f$.

22.11.2007

18

Laplace-muunnos

- Määritelmä: ($f(t)$ on ajan funktio ja $F(s)$ on sitä vastaava Laplace-tason esitys)

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{i2\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(s)e^{st} ds$$

- Jos raja-arvot ovat olemassa, niin niille pätee
 - Loppuarvoteoreema $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
 - Alkuarvoteoreema $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
- Laplace-aulukot on esitetty eri lähteissä hieman erilaisina (yleensä joko niin, että ajan funktiot on helppo Laplace-muuntaa tai niin, että Laplace-tason esitys voidaan käänteismuuntaa helposti).

22.11.2007

19

Laplace-teoreemoja

Laplace-muunnos	Ajan funktio	
$F(s)$	$f(t)$	T1
$C_1F_1(s) + C_2F_2(s)$	$C_1f_1(t) + C_2f_2(t)$	T2
$F(s+a)$	$e^{-at}f(t)$	T3
$e^{-as}F(s)$	$\begin{cases} 0, & t \leq a \\ f(t-a), & t > a \end{cases}$	T4
$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(at)$	T5
$-\frac{d}{ds}F(s)$	$f(t)t$	T6

22.11.2007

20

Laplace-teoreemoja

Laplace-muunnos	Ajan funktio	
$\int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$	$f(t) \frac{1}{t}$	T7
$F_1(s)F_2(s)$	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	T8
$sF(s) - f(0)$	$\dot{f}(t)$	T9
$s^2F(s) - (sf(0) + \dot{f}(0))$	$\ddot{f}(t)$	T10
$s^n F(s) - (s^{n-1}f(0) + s^{n-2}\dot{f}(0) + \dots + f^{(n-1)}(0))$	$f^{(n)}(t)$	T11
$\frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) \Big _{t=0}$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	T12

Laplace-muunnospareja

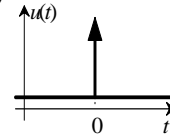
Laplace-muunnos	Ajan funktio		Laplace-muunnos	Ajan funktio	
1	$\delta(t)$	M1	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})$	M9
$\frac{1}{s}$	1	M2	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ab(b-a)}(ae^{-bt} - be^{-at})$	M10
$\frac{1}{s^2}$	t	M3	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	sin(at)	M11
$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$	M4	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	cos(at)	M12
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	M5	$\frac{a}{(s+b)^2 + a^2}$	$e^{-bt} \sin(at)$	M13
$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	M6	$\frac{s+b}{(s+b)^2 + a^2}$	$e^{-bt} \cos(at)$	M14
$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$	$\frac{t^n e^{-at}}{n!}$	M7	$\frac{s+a}{s+b}$	$\delta(t) + (a-b)e^{-bt}$	M15
$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	M8			

Deterministiset testifunktiot

- Systemin herätteenä $u(t)$ käytetään usein seuraavia signaaleja
 - Yksikköimpulssifunktio (Diracin deltafunktio)

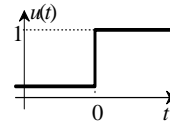
$$u_{\delta}(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty; & t = 0_+ \\ 0; & \text{muulloin} \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$U_{\delta}(s) = \Delta(s) = 1$$



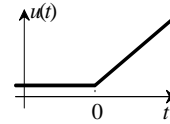
- Yksikköaskelfunktio

$$u_s(t) = \begin{cases} 0; & t \leq 0 \\ 1; & t > 0 \end{cases} \quad U_s(s) = \frac{1}{s}$$



- Yksikköpengerfunktio

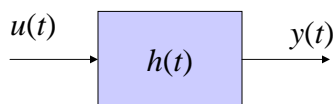
$$u_r(t) = \begin{cases} 0; & t \leq 0 \\ t; & t > 0 \end{cases} \quad U_r(s) = \frac{1}{s^2}$$



22.11.2007

23

LTI-järjestelmät



- Tarkastellaan lineaarista aikainvarianttia järjestelmää

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \dots + b_0 u(t), \quad n \geq m$$

- Oletetaan, että järjestelmän alkuarvot ovat nolliä:

$$y^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} y(t) = 0 \quad \text{kun } t \leq 0$$

$$u^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} u(t) = 0 \quad \text{kun } t \leq 0$$

22.11.2007

24

LTI-järjestelmät

- Derivaatan Laplace-muunnos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^k}{dt^k}v(t)\right\} = s^k V(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} y^{(k)}(0)$$

- LTI-järjestelmän Laplace muunnos

$$L\left\{\frac{d^n}{dt^n}y(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k}{dt^k}y(t)\right\} = L\left\{\sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k}{dt^k}u(t)\right\}$$
$$\Rightarrow \left(s^n + \sum_{l=0}^{n-1} a_l s^l\right) Y(s) = \sum_{k=0}^m b_k s^k U(s)$$

- Siirtofunktio

$$H(s) \triangleq \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{s^n + \sum_{l=0}^{n-1} a_l s^l}$$

22.11.2007

25

Impulssivaste

- LTI-järjestelmälle pätee yleisesti

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

- Käytetään herätteenä impulssia $u(t) = \delta(t)$.

$$U(s) = L\{\delta(t)\} = 1$$

$$Y(s) = H(s)U(s) = H(s)$$

$H(s)$ on Impulssivasteen Laplace muunnos.

- **Impulssivaste (painofunktio)** $h(t)$ saadaan käänteismuunnoksena:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$$

Laplace-muunnos löytyy vaikka järjestelmä olisi epästabiili.

22.11.2007

26

Impulssivaste

- Lineaarisen järjestelmän siirtofunktio voidaan esittää kahden polynomin $M(s)$ ja $N(s)$ avulla

$$H(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = K \frac{(s-z_1)^{M_1} (s-z_2)^{M_2} \dots (s-z_{m_z})^{M_{m_z}}}{(s-p_1)^{N_1} (s-p_2)^{N_2} \dots (s-p_{n_z})^{N_{n_z}}}$$

- Polynomin $M(s)$ nollakohdat $M(z_k)=0$ ovat nimeltään **nollia** (zero)
 - M_k on nollan z_k asteluku
 - $M_1 + M_2 + \dots + M_{n_z} = m$
- Polynomin $N(s)$ nollakohdat $N(p_k)=0$ ovat nimeltään **napoja** (pole)
 - N_k on navan p_k asteluku
 - $N_1 + N_2 + \dots + N_{n_p} = n$
 - Yhtälö $N(s)=0$ on nimeltään **karakteristinen yhtälö**
- $K > 0$ on vakio

22.11.2007

27

Osamurtokehitemä

- Osamurtokehitemä siirtofunktiolle $H(s)$:

$$H(s) = K \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{C_{ij}}{(s-p_i)^j}$$

$$= K \left(\frac{C_{11}}{(s-p_1)} + \frac{C_{12}}{(s-p_1)^2} + \dots + \frac{C_{1N_1}}{(s-p_1)^{N_1}} \right.$$

$$+ \frac{C_{21}}{(s-p_2)} + \frac{C_{22}}{(s-p_2)^2} + \dots + \frac{C_{2N_2}}{(s-p_2)^{N_2}}$$

$$+ \dots$$

$$\left. + \frac{C_{n_p1}}{(s-p_{n_p})} + \frac{C_{n_p2}}{(s-p_{n_p})^2} + \dots + \frac{C_{n_pN_p}}{(s-p_{n_p})^{N_p}} \right)$$

- Kertoimet

$$C_{ij} = \left[\frac{1}{(N_i - j)!} \cdot \frac{d^{N_i - j}}{ds^{N_i - j}} \left((z - p_i)^{N_i} \frac{M(s)}{N(s)} \right) \right]_{s=p_i}$$

22.11.2007

28

Esimerkki (1/3)

- Tehdään oheiselle siirtofunktiolle osamurtokehitelmä

$$H(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$$

- Osoittaja ja nimittäjä polynomit:

$$M(s) = s - (-3)$$

$$z_1 = -3$$

$$N(s) = (s - (-1))^2 (s - (-2))$$

$$p_1 = -1 \quad p_2 = -2 \quad \text{Asteluku on 3}$$

$$N_1 = 2 \quad N_2 = 1$$

- Osamurtokehitelmä tulee olemaan muotoa

$$H(s) = \frac{C_{11}}{(s+1)} + \frac{C_{12}}{(s+1)^2} + \frac{C_{21}}{(s+2)}$$

22.11.2007

29

Esimerkki (2/3)

- Kertoimet lasketaan kaavalla:

$$C_{ij} = \left[\frac{1}{(N_i - j)!} \cdot \frac{d^{N_i - j}}{ds^{N_i - j}} \left((z - p_i)^{N_i} \frac{M(s)}{N(s)} \right) \right]_{s=p_i}$$

- Eli

$$C_{11} = \left[\frac{1}{(N_1 - 1)!} \cdot \frac{d^{N_1 - 1}}{ds^{N_1 - 1}} \left((z - p_1)^{N_1} \frac{M(s)}{N(s)} \right) \right]_{s=p_1}$$

$$= \left[\frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \frac{s+3}{s+2} \right]_{s=-1} = \left[\frac{-1}{(s+2)^2} \right]_{s=-1} = -1$$

$$C_{12} = \left[\frac{1}{(N_1 - 2)!} \cdot \frac{d^{N_1 - 2}}{ds^{N_1 - 2}} \left((z - p_1)^{N_1} \frac{M(s)}{N(s)} \right) \right]_{s=p_1} = \left[\frac{1}{0!} \frac{s+3}{s+2} \right]_{s=-1} = 2$$

$$C_{21} = \left[\frac{1}{(N_2 - 1)!} \cdot \frac{d^{N_2 - 1}}{ds^{N_2 - 1}} \left((z - p_2)^{N_2} \frac{M(s)}{N(s)} \right) \right]_{s=p_2} = \left[\frac{1}{0!} \frac{s+3}{(s+1)^2} \right]_{s=-2} = 1$$

22.11.2007

30

Esimerkki (3/3)

- Kootaan tulokset yhteen:

$$H(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+2}$$

- Tarkastetaan vielä...

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{-(s+1)(s+2) + 2(s+1) + (s+1)^2}{(s+1)^2(s+2)} \\ &= \frac{-(s^2 + 3s + 2) + 2s + 2 + s^2 + 2s + 1}{(s+1)^2(s+2)} \\ &= \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)} \quad \mathbf{OK} \end{aligned}$$

22.11.2007

31

Impulssivaste

- LTI-järjestelmän impulssivaste voidaan kirjoittaa muotoon

$$H(s) = K \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{C_{ij}}{(s-p_i)^j}$$

- Käänteismuunnos saadaan soveltamalla kaavaa (M7)

$$L\left\{\frac{t^n e^{-at}}{n!}\right\} = \frac{1}{(s+a)^{n+1}}$$

jolloin impulssivasteeksi saadaan

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\left\{K \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{C_{ij}}{(s-p_i)^j}\right\} \\ &= K \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{C_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{p_i t} \end{aligned}$$

22.11.2007

32

Stabiilisuus

- LTI-järjestelmälle pätee

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

- Oletetaan, että herätesignaali $u(t)$ on amplitudirajoitettu $|u(t)| \leq M < \infty$
Vaste $y(t)$ on amplitudirajoitettu ja järjestelmä on stabiili, jos

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||u(t-\tau)|d\tau \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$$

Toisin sanoen, järjestelmä on stabiili, mikäli impulssivaste $h(t)$ on itseisesti integroitava

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$$

22.11.2007

33

Stabiilisuus

- LTI-järjestelmän impulssivaste on muotoa

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \frac{C_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{p_i t}$$

missä navat p_k ovat kompleksilukuja

- Jos $\text{Re}\{p_k\} < 0$, niin

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \frac{C_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{p_i t} \rightarrow 0$$

kun $t \rightarrow \infty$

ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$$

22.11.2007

34

LTI-järjestelmät

- Jos järjestelmä on stabiili, niin $h(t)$:n ja $y(t)$ Fourier muunnos tunnetaan ($y(t)$ on energiasignaali).
- Fourier-muuntuvan signaalin $y(t)$ derivaatta voidaan lausua $Y(f)$:n avulla:

$$F \left\{ \frac{d^k}{dt^k} y(t) \right\} = (i2\pi f)^k Y(f)$$

- Oletetaan, että heräte on Fourier-muuntuva

$$F \left\{ \frac{d^k}{dt^k} U(t) \right\} = (i2\pi f)^k U(f)$$

22.11.2007

35

LTI-järjestelmän Fourier muunnos

- Fourier muunnetaan alkuperäinen differentiaaliyhtälö

$$F \left\{ \frac{d^n}{dt^n} y(t) \right\} + a_{n-1} F \left\{ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) \right\} + \dots + a_0 F \{ y(t) \} = \\ b_m F \left\{ \frac{d^m}{dt^m} u(t) \right\} + b_{m-1} F \left\{ \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) \right\} + \dots + F \{ b_0 u(t) \}$$

- Muunnokseksi tulee

$$\left((i2\pi f)^n + \sum_{l=0}^{n-1} a_l (i2\pi f)^l \right) Y(f) = \sum_{k=0}^m b_k (i2\pi f)^k U(f)$$

- Suhdetta $Y(f)/U(f)$ kutsutaan järjestelmän **siirtofunktioksi**

$$H(f) \triangleq \frac{Y(f)}{U(f)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (i2\pi f)^k}{(i2\pi f)^n + \sum_{l=0}^{n-1} a_l (i2\pi f)^l}$$

22.11.2007

36

Navat

- Navat saadaan ratkaistua karakteristisesta yhtälöstä

$$N(s) = (s - p_1)^{N_1} (s - p_2)^{N_2} \dots (s - p_N)^{N_n} = 0$$

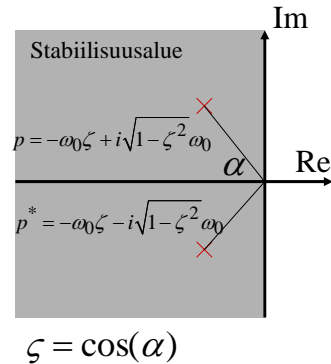
$$s = p_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

- Reaalisen järjestelmälle $h(t) \in \mathbb{R}$ navat esiintyvät kompleksikonjugaattipareina

$$N(s) = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

$$s = \begin{cases} -\zeta\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} & \zeta < 1 \text{ alivaimennettu} \\ -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2-1} & \zeta \geq 1 \text{ ylivaimennettu} \end{cases}$$

ζ vaimennuskertoin
 ω_0 ominaistaajuus



22.11.2007

37

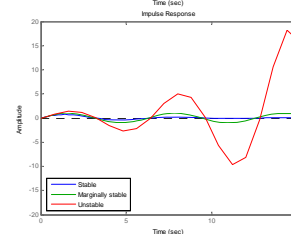
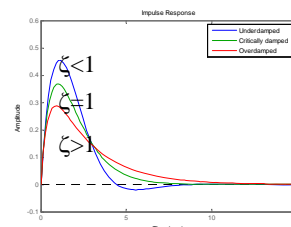
Navat

- Kompleksin napaparin vaikutus impulssivasteeseen

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

- Resonanssitaajuus $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$

$\zeta \geq 1$ stabiili, ei värähtele
 $\zeta < 1$ stabiili, värähtelee
 $\zeta = 0$ marginaalisesti stabiili, värähtelee, ei vaimene
 $-1 \leq \zeta < 0$ epästabiili, värähtelee
 $\zeta < -1$ epästabiili, ei värähtele

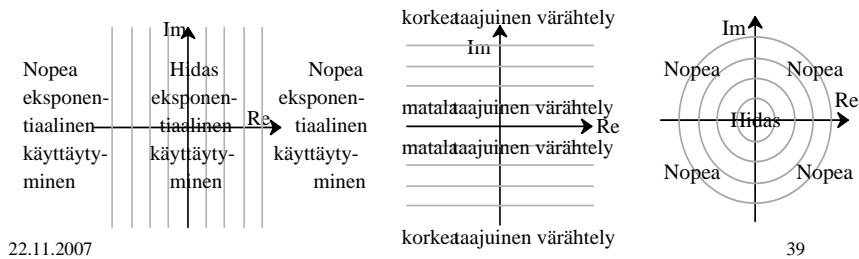


22.11.2007

38

Navat

- Etäisyys imaginääriakselista kuvaa eksponentiaalista käyttäytymistä (mitä kauempana imaginääriakselista ollaan sitä nopeammin impulssivaste saavuttaa loppuarvonsa (vasemmassa puolitasossa) tai karkaa äärettömyyteen (oikeassa puolitasossa).
- Etäisyys reaaliakselista kuvaa värähtelyn taajuutta (mitä kauempana reaaliakselista ollaan sitä suurempi taajuus).
- Järjestelmä on sitä nopeampi mitä kauempana sen navat ovat origosta



Esimerkki (1/3)

- Tarkastellaan esimerkin 2 sähköpiiriä

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{dy(t)}{dt} + \frac{2}{LC} y(t) = \frac{1}{LC} x(t)$$

$$R=1, C=1, L=1$$

- Ratkaistaan siirtofunktio Laplace-muuntamalla:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) = X(s)$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)}$$

Esimerkki (2/3)

- Navat

$$N(s) = (s^2 + 2s + 2) = (s - p_1)(s - p_2) = 0$$

$$s = \begin{cases} -1+i & = p_1 \\ -1-i & = p_2 \end{cases} \quad \omega_0 = 1, \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- $\text{Re}\{p_k\} < 0$, joten järjestelmä on stabiili.
- Osamurtokehiteelmä

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2}$$

$$= \frac{As - p_2A + Bs - p_1B}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$s^1: A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$22.11.2007 \quad s^0: -p_2A - p_1B = (1+i)A + (1-i)(-A) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2i} \quad 41$$

Esimerkki (3/3)

- Siirtofunktioksi saadaan

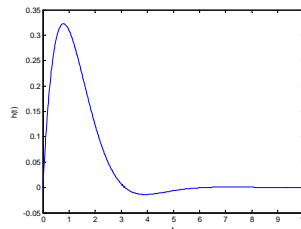
$$H(s) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s+1-i} + \frac{-1}{s+1+i} \right)$$

$$L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

- Käänteismuunnos antaa

$$h(t) = \frac{1}{2i} \left(e^{-(1-i)t} - e^{-(1+i)t} \right) = e^{-t} \sin(t)$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$



22.11.2007

42

Stabiilisuustestit

- Jos tunnetaan systeemin navat (nimittäjäpolynomien nollakohdat), niin stabiilisuus on helppo todeta.
 - Juuret voidaan määrittää numeerisesta polynomista iteratiivisilla laskentaruutiineilla (kuten komennot `eig`, `roots` tai `pole` MATLABissa).
 - Esim. polynomille

$$s^3 + 2s^2 + 4s + 10$$

```

roots([1 2 4 10])
ans =    -2.2236
         0.1118 + 2.1177i
         0.1118 - 2.1177i
                    
```
 - Jos jokin polynomien kertoimista on nolla tai negatiivinen, niin polynomilla on vähintään yksi juuri imaginääriakselilla tai oikeassa puolitasossa.

22.11.2007

43

Routhin kaavio

- Symboliseen laskentaa soveltuu Routhin kaavio:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	a_8	\dots	
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	a_9	\dots	
s^{n-2}	b_0	b_2	b_4	b_6	\dots		
s^{n-3}	b_1	b_3	b_5	b_7	\dots		
s^{n-4}	c_0	c_2	c_4	\dots			$b_0 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad b_2 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}, \quad b_4 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}, \dots$
s^{n-5}	c_1	c_3	c_5	\dots			$b_1 = \frac{-1}{b_0} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}, \quad b_3 = \frac{-1}{b_0} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_0 & b_4 \end{vmatrix}, \quad b_5 = \frac{-1}{b_0} \begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_0 & b_6 \end{vmatrix}, \dots$
\vdots	\vdots						
s^1	z_0						$c_0 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} b_0 & b_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad c_2 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} b_0 & b_4 \\ b_1 & b_5 \end{vmatrix}, \dots$
s^0	z_1						\vdots
							$z_1 = a_n$

Determinantti

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

22.11.2007

44

Routhin kaavio

- Routhin kaavion ensimmäisessä sarakkeessa olevien merkinvaihtojen lukumäärä on samalla myös polynomin oikeassa puolitasossa olevien juurien lukumäärä.
- Jos systeemin karakteristinen polynomi sijoitetaan Routhin kaavioon, niin *systeemi on stabiili, jos ensimmäisessä sarakkeessa ei ole ainoatakaan merkinvaihtoa*.
- Jos kaaviota muodostettaessa sen ensimmäiseen sarakkeeseen tulee nolla, niin sen tilalle kaavioon sijoitetaan pieni positiivinen luku ε ja jatketaan kaavion muodostamista. Lopullisesta kaaviosta voidaan laskea merkinvaihdot tutkimalla ε :sta riippuvien termien raja-arvot, kun $\varepsilon \rightarrow 0$.
- Mikäli kaavioon muodostuu koko rivi nollia, niin välittömästi nollariviä ylemmästä rivistä voidaan muodostaa polynomi, jolla alkuperäinen polynomi on jaollinen.

22.11.2007

45

Esimerkit: Routhin kaavio

- Polynomit:

$$s^3 + 2s^2 + 4s + 10$$

s^3	1	4
s^2	2	10
s^1	-1	
s^0	10	

Kaksi merkinvaihtoa $2 \rightarrow -1$
ja $-1 \rightarrow 10$
eli kaksi juurta oikeassa puolitasossa

$$s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 2$$

s^4	1	6	2
s^3	4	4	
s^2	5	2	
s^1	12/5		
s^0	2		

Ei merkinvaihtoja ensimmäisessä sarakkeessa eli ei juuria oikeassa puolitasossa

22.11.2007

46

Esimerkit: Routhin kaavio

- Polynomi: $s^3 + s^2 + 2s + 2$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 2 \\ \hline s^1 & 0 & 0 \\ s^0 & & \end{array}$$

Saadaan nollarivi, jolloin ylemmältä riviltä saadaan polynomi $s^2 + 2$ jolla alkuperäinen polynomi on jaollinen.

Lasketaan tämän polynomin derivaatta s :n suhteen ja sijoitetaan se kaavioon ... ja jatketaan

$$\frac{d}{ds}(s^2 + 2) = 2s \quad \begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 2 \\ \hline s^1 & 2 & 0 \\ s^0 & & 2 \end{array}$$

22.11.2007

Ei merkinvaihtoja, joten ei juuria oikeassa puolitasossa

Esimerkit: Routhin kaavio

- Polynomi:

$$s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 12s + 12$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 4 & 12 \\ s^3 & 3 & 12 & \\ \hline s^2 & 0 \rightarrow \varepsilon & 12 & \\ s^1 & (12\varepsilon - 36) / \varepsilon & & \\ \hline s^0 & 12 & & \end{array}$$

Ensimmäiseen sarakkeeseen tulee nolla, jolloin korvataan se pienellä positiivisella luvulla ε ja jatketaan kaavion muodostamista

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 4 & 12 \\ s^3 & 3 & 12 & \\ \hline s^2 & 0 & 12 & \\ s^1 & -\infty & & \\ \hline s^0 & 12 & & \end{array}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{12\varepsilon - 36}{\varepsilon} \right\} = -\infty$$

22.11.2007

kaksi merkinvaihtoa $0 \rightarrow -\infty$ ja $-\infty \rightarrow 12$
 \Rightarrow kaksi juuria oikeassa puolitasossa

Järjestelmien kokoaminen osista

- Lineaaristen järjestelmien tapauksessa yksittäisten osajärjestelmien malleista päästään laajojen järjestelmien malleihin lohkokaavioalgebran avulla.
- Lohkokaavioalgebrassa peruselementtejä ovat osajärjestelmiä kuvaavat siirtofunktiot
- Siirtofunktiot voivat perustua impulssivasteen
 - Laplace-muunnokseen $H(s)$
 - Fourier-muunnokseen $H(f)$ [$s=i2\pi f$]

22.11.2007

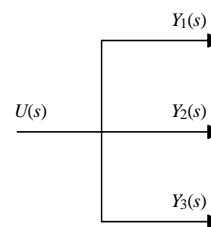
49

Perustuu kurssin AS-74.2111 Analoginen säätö luentomateriaaliin

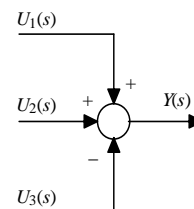
Lohkokaaviomuunnokset: Signaalit

- Lohkokaavioissa yksittäinen signaali voidaan viedä useaan eri lohkoon (signaalin haaraantuminen).
 - Lohkokaavio on informaatiokaavio ja informaatiota jaettaessa se ei vähene vaan monistuu. Jokaisessa haarassa kulkee sama informaatio.

$$Y_1(s) = Y_2(s) = Y_3(s) = U(s)$$



- Eri signaalit voidaan yhdistää summaelimen avulla. Summaelimessä voidaan signaalit laskea yhteen tai vähentää toisistaan.
 - Etumerkit summaelimessä signaalin kohdalla kertovat signaalin etumerkin summalausekkeessa.

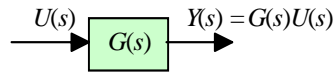


22.11.2007 $Y(s) = U_1(s) + U_2(s) - U_3(s)$

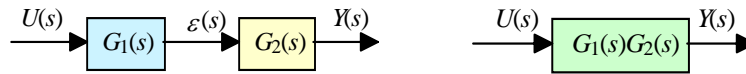
50

Signaalin kulkeminen lohkon läpi

- Lohkon lähtösignaali (vaste) saadaan kertomalla tulosa signaali (heräte) lohkon siirtöfunktioilla



- Tämän peruskaavan avulla voidaan johtaa muunnoskaava lohkojen sarjakytkennälle. Otetaan käyttöön apumuuttuja $\varepsilon(s)$, joka myöhemmin eliminoidaan



$$\begin{cases} Y(s) = G_2(s)\varepsilon(s) \\ \varepsilon(s) = G_1(s)U(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = G_1(s)G_2(s)U(s) = G_{TOT}(s)U(s)$$

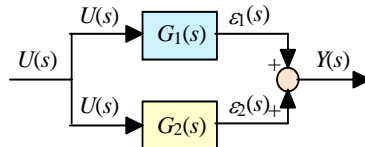
$$\Rightarrow G_{TOT}(s) = G_1(s)G_2(s)$$

22.11.2007

51

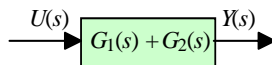
Signaalin kulkeminen lohkon läpi

- Johdetaan nyt muunnoskaava rinnankytkennälle



$$\begin{cases} Y(s) = \varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s) \\ \varepsilon_1(s) = G_1(s)U(s) \\ \varepsilon_2(s) = G_2(s)U(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s)$$

$$Y(s) = (G_1(s) + G_2(s))U(s) = G_{TOT}(s)U(s) \Rightarrow G_{TOT}(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

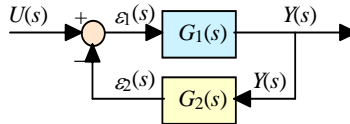


22.11.2007

52

Signaalin kulkeminen lohkon läpi

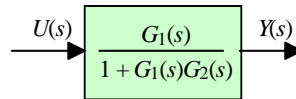
- Takaisinkytkennän (silmuikkakytkennän) muunnoskaavaksi saadaan



$$\begin{cases} Y(s) = G_1(s)\varepsilon_1(s) \\ \varepsilon_1(s) = U(s) - \varepsilon_2(s) \Rightarrow Y(s) = G_1(s)(U(s) - G_2(s)Y(s)) \\ \varepsilon_2(s) = G_2(s)Y(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(s) = G_1(s)U(s) - G_1(s)G_2(s)Y(s) \Rightarrow (1 + G_1(s)G_2(s))Y(s) = G_1(s)U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}U(s) = G_{TOT}(s)U(s) \Rightarrow G_{TOT}(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$



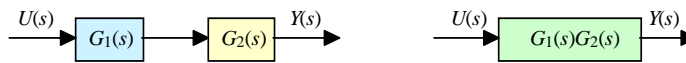
22.11.2007

53

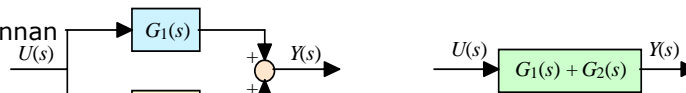
Lohkokaaviomuunnokset: Peruskytkennät

- Peruskytkentöjen lohkokaaviomuunnokset koottuna:

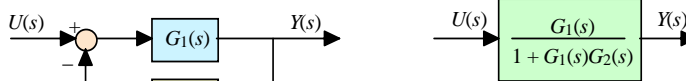
- Sarjaan



- Rinnan



- Silmukkaan

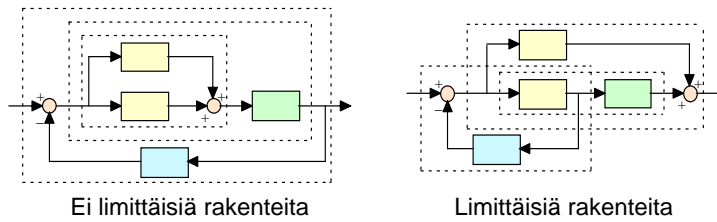


22.11.2007

54

Limittäiset rakenteet

- Jos järjestelmässä on limittäisiä rakenteita, niin lohko-kaaviomuunnokset voidaan ratkaista
 - algebrallisesti - kuten perusmuunnoskaavoja johtaessa
 - tai eliminoimalla limittäiset rakenteet (siirtämällä summa- ja haaraantumispisteitä lohkojen yli) ja sitten käyttämällä perusmuunnoskaavoja.

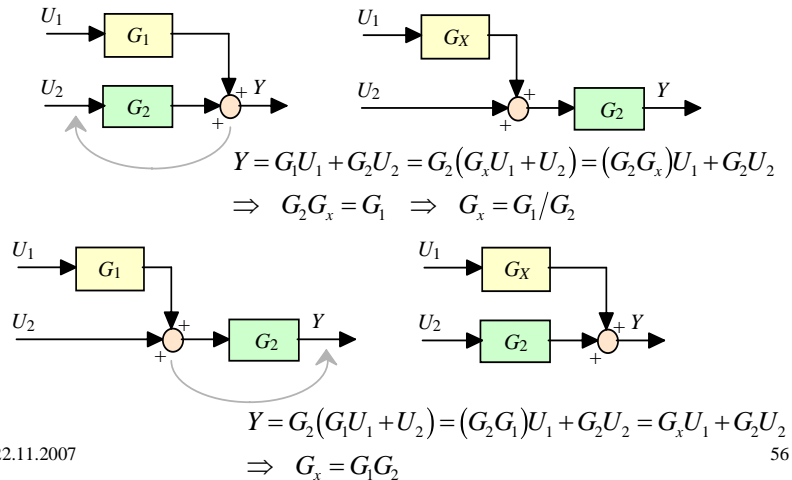


22.11.2007

55

Summa- ja haaraantumispisteiden siirrot

- Summapisteen siirto "vastavirtaan" ja "myötävirtaan" - ratkaistaan G_x

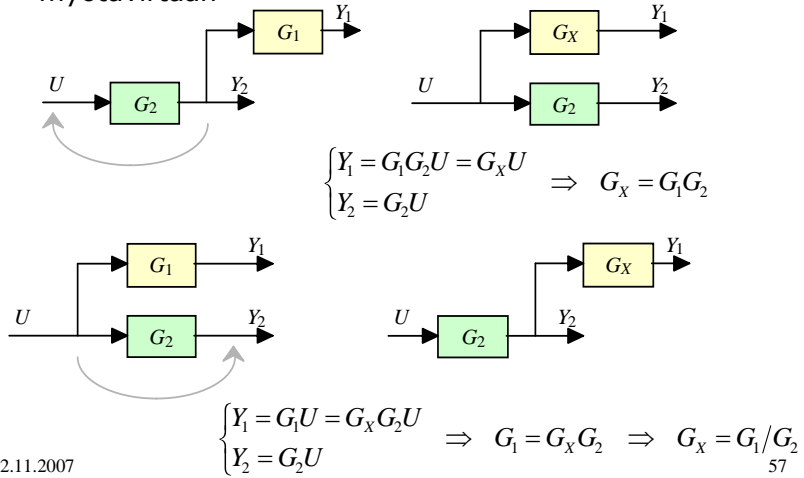


22.11.2007

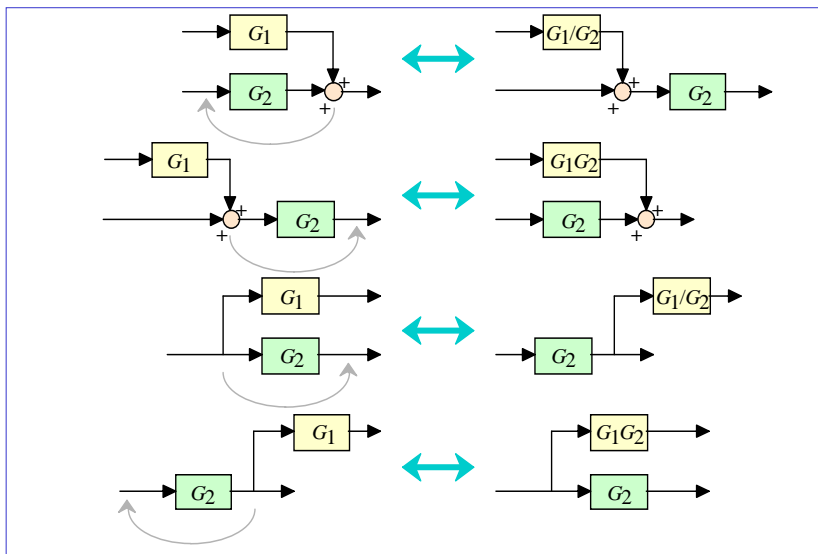
56

Summa- ja haaraantumispisteiden siirrot

- Haaraantumispisteen siirto "vastavirtaan" ja "myötävirtaan"

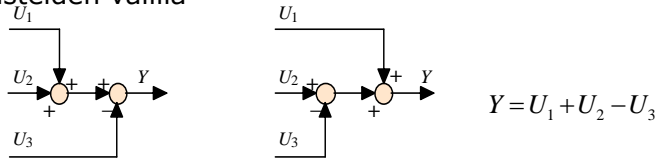


Summa- ja haaraantumispisteiden siirrot

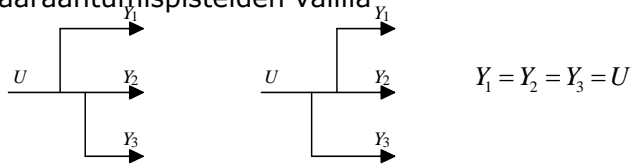


Summa- ja haaraantumispisteiden siirrot

- Summapisteiden järjestystä voidaan vaihtaa toisten summapisteiden välillä



- Haaraantumispisteiden järjestystä voidaan vaihtaa toisten haaraantumispisteiden välillä



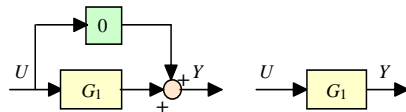
- Summapisteiden ja haaraantumispisteiden välistä järjestystä ei voida vaihtaa

22.11.2007

59

Nolla- ja ykköslohkot

- Mikäli lohkon siirtofunktio on nolla, niin kaikilla tulosuureen arvoilla lähtösuure on aina nolla. Tämä lohko kuvaa informaatiokatkosta - lohko, siihen tulevat ja siitä lähtevät signaalit voidaan jättää pois lohkokaaviosta.

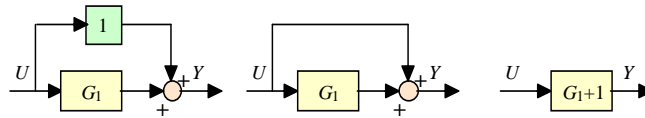


22.11.2007

60

Nolla- ja ykköslohkot

- Mikäli lohkon siirtofunktio on yksi, niin kaikilla tulosuureen arvoilla lähtösuure on aina sama kuin tulosuure ja kyseinen lohko voidaan jättää kaaviosta pois. Järjestelmien lohko-kaaviossa on usein merkitty lohkot mittaukselle tai toimilaitteelle ja mikäli oletetaan ideaalinen mittaus tai toimilaitte, niin näiden lohkojen siirtofunktiot voidaan korvata ykkösellä - ja jättää kokonaan pois lohko-kaaviosta.



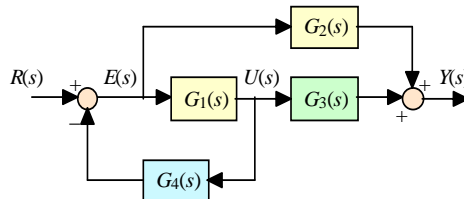
22.11.2007

61

Perustuu kurssin AS-74.2111 Analoginen säätö luentomateriaaliin

Esimerkki: limittäiset rakenteet

- Ratkaistaan oheisen järjestelmän kokonaissiirtofunktio tulosignaalista R lähtösignaaliin Y algebrallisesti



$$\begin{cases} Y = G_3 U + G_2 E \\ U = G_1 E \\ E = R - G_4 U \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = G_1 G_3 E + G_2 E \\ E = R - G_1 G_4 E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = (G_1 G_3 + G_2) E \\ (1 + G_1 G_4) E = R \end{cases}$$

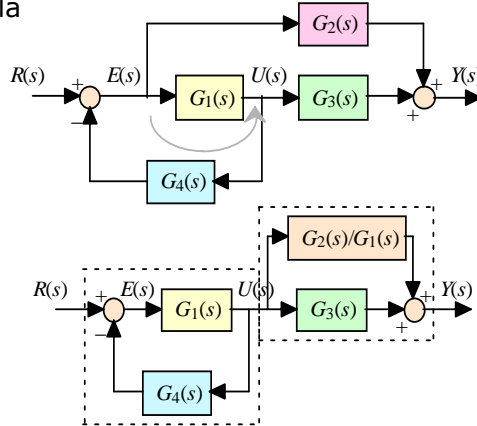
$$\Rightarrow Y = \frac{G_1 G_3 + G_2}{1 + G_1 G_4} R = G_{TOT} R$$

22.11.2007

62

Esimerkki: limittäiset rakenteet

- Ratkaistaan oheisen järjestelmän kokonaissiirtofunktio tulosignaali R lähtösignaaliin Y lohkokaaviomuunnoksilla
- Siirretään E :n haaraantumispiste U :n haaraantumispisteeseen luo (haaraantumispisteiden järjestys voidaan vaihtaa keskenään), jolloin päästään eroon limittäisistä rakenteista ja voidaan käyttää aikaisemmin johdettuja peruskytkentöjen kaavoja.

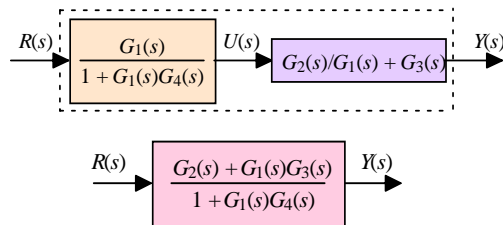


22.11.2007

63

Esimerkki: limittäiset rakenteet

- Saadaan sama tulos kuin lohkokaavioalgebralla



22.11.2007

64

Lohkodiagrammi

- Tarkastellaan n dimensioista lineaarista järjestelmää

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^k u(t)}{dt^k}$$

- Integroidaan molemmat puolet

$$\begin{aligned} a_n y(t) + a_{n-1} \int y(t) dt + a_{n-1} \int \int y(t) dt dt + \dots + a_0 \int \int \dots \int y(t) dt \dots dt \\ = b_n x(t) + b_{n-1} \int x(t) dt + b_{n-1} \int \int x(t) dt dt + \dots + b_0 \int \int \dots \int x(t) dt \dots dt \end{aligned}$$

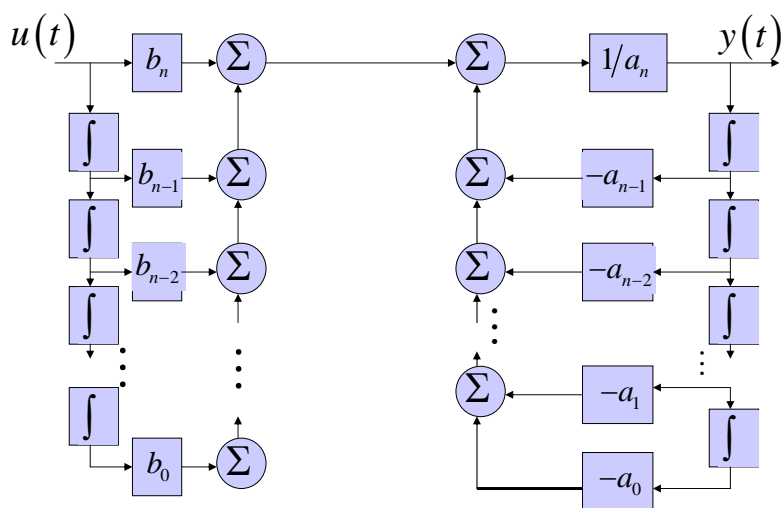
- Ratkaistaan y(t)

$$\begin{aligned} y(t) = -\frac{1}{a_n} \left(-a_{n-1} \int y(t) dt - a_{n-2} \int \int y(t) dt dt + \dots \right. \\ \left. + b_n x(t) + b_{n-1} \int x(t) dt + b_{n-2} \int \int x(t) dt dt + \dots \right) \end{aligned}$$

22.11.2007

65

Lohkodiagrammi



22.11.2007

66

Lohkodiagrammi

- Lohkodiagrammia voidaan yksinkertaistaa

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k (y(t) - u(t))}{dt^k} = 0$$

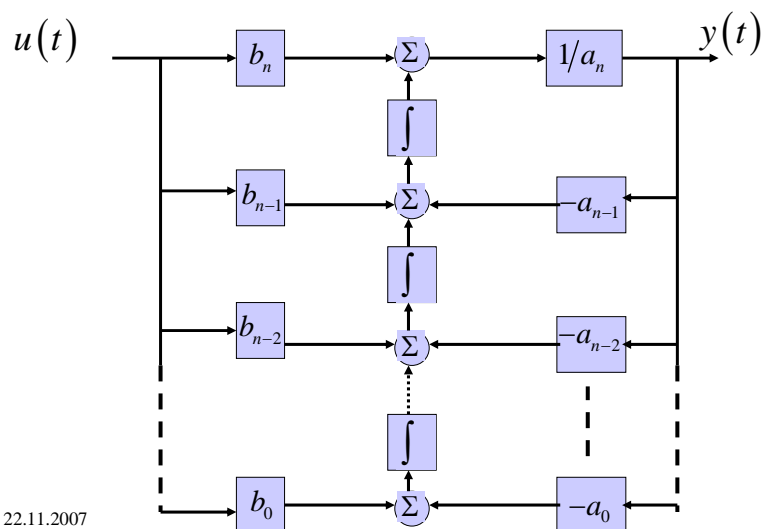
- Integroidaan yhtälö nyt n kertaa

$$\begin{aligned} & a_n y(t) - b_n u(t) + \int (a_{n-1} y(t) - b_{n-1} u(t)) dt \\ & + \iint (a_{n-2} y(t) - b_{n-2} u(t)) dt dt + \dots + \int \dots \int (a_0 y(t) - b_0 u(t)) dt \dots dt \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{1}{a_n} (b_n u(t) + \int (-a_{n-1} y(t) + b_{n-1} u(t)) dt \\ & + \iint (-a_{n-2} y(t) + b_{n-2} u(t)) dt dt + \dots + \int \dots \int (-a_0 y(t) + b_0 u(t)) dt \dots dt) \end{aligned}$$

22.11.2007

67

Lohkodiagrammi



22.11.2007

68

Esimerkki

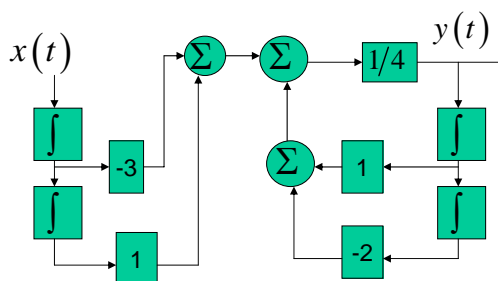
- Tarkastellaan 2. kertaluvun järjestelmää

$$4\ddot{y} - \dot{y} + 2y = -3\dot{x} + x$$

- Integroidaan molemmin puolin

$$4y = \int y dt - 2 \int \int y dt dt$$

$$-3 \int x dt + \int \int x dt dt$$



22.11.2007

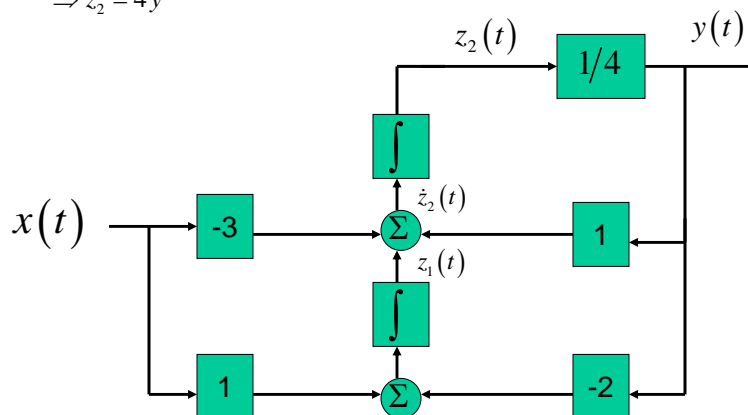
69

Esimerkki

- Vaihtoehtoisesti

$$4\ddot{y} - \dot{y} + 3\dot{x} = -2y + x = \dot{z}_1 \Rightarrow z_1 = 4\dot{y} - y + 3x \Rightarrow \dot{z}_2 = z_1 + y - 3x = 4\dot{y}$$

$$\Rightarrow z_2 = 4y$$



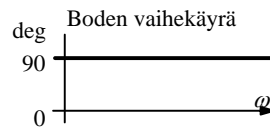
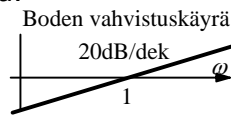
22.11.2007

70

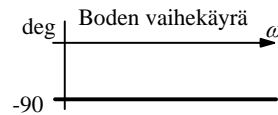
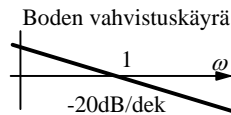
Lohkodiagrammi

- Mielivaltainen lineaarinen aikainvariantti järjestelmä voidaan realisoida käyttäen joko derivaattoreita tai integraattoreita.

Derivaattori



Integraattori



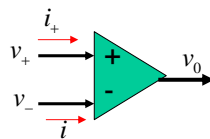
- Derivaattori vahvistaa korkeita taajuuksia ja on siten herkkä kohinalle. Integraattori puolestaan suodattaa kohinaa. => Lineaarinen järjestelmä kannattaa realisoida käyttäen integraattoreita

22.11.2007

71

Operaatiovahvistin

- Operaatiovahvistin (Op-Amp) on integroitu piiri
- Op-Amp omaa kaksi sisääntuloa (non-inverted + ja inverted -)
- Ominaisuuksia
 - Hyvin suuri vahvistus ($A > 10^6$)
 - Erittäin suuri sisäänmenoimpedanssi
 - Suuresta impedanssista johtuen, sisäänmenevät virrat ovat lähes nollaa $i_+ = i_- \approx 0$
 - Jos käytetään negatiivista takaisinkytkentää, niin $v_+ \approx v_-$



$$v_0 = A(v_+ - v_-)$$

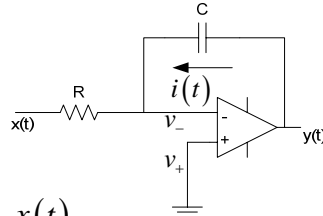
22.11.2007

72

Käytännöllinen integraattori

- Analoginen integraattori voidaan toteuttaa käyttäen operaatiovahvistinta

Virtual ground $v_- \approx v_+ = 0$



$$i(t) = C \frac{dy(t)}{dt}, \quad \because i_- \approx 0 \Rightarrow -\frac{x(t)}{R} = i(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = -RC \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{RC} \int x(t) dt$$

22.11.2007

73