

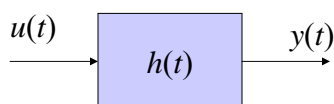
Luento 7

- Lineaaristen järjestelmien analyysi taajuustasossa
 - Taajuusvaste
 - Stabiilisuus

22.11.2007

1

LTI-järjestelmät



- Tarkastellaan lineaarista aikainvarianttia järjestelmää

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) = -a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) - \dots - a_0 y(t) + b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \dots + b_0 u(t), n \geq m$$

- Käytetään pyörivää osoitinta herätteenä

$$u(t) = e^{i2\pi ft}$$

ja arvataan, että vaste on muotoa

$$y(t) = H(f)e^{i2\pi ft}$$

22.11.2007

2

LTI-järjestelmät

- Sijoittamalla heräte sekä arvattu vaste differentiaaliyhtälöön saadaan

$$\left((i2\pi f)^n + \sum_{l=0}^{n-1} a_l (i2\pi f)^l \right) H(f) e^{i2\pi ft} = \sum_{k=0}^m b_k (i2\pi f)^k e^{i2\pi ft}$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (i2\pi f)^k}{(i2\pi f)^n + \sum_{l=0}^{n-1} a_l (i2\pi f)^l} \quad \text{Siirtofunktio}$$

- Joten taajuudella f pyörivää osoitin generoi vasteeksi samalla taajuudella pyörivän osoittimen, jonka amplitudi ja vaihe ovat muuttuneet

$$y(t) = H(f) e^{i2\pi ft} = |H(f)| e^{i2\pi ft + i \arg H(f)}$$

22.11.2007

3

Taajuusvaste

- Järjestelmän **taajuusvaste** saadaan syöttämällä sisään eri taajuisia sini-muotoisia signaaleja ja katsomalla kuinka niiden amplitudi ja vaihe muuttuvat kulkiessaan järjestelmän läpi.

$$u(t) = \cos(2\pi ft) = \frac{1}{2} (e^{i2\pi ft} + e^{-i2\pi ft})$$

$$y(t) = \frac{1}{2} H(f) e^{i2\pi ft} + \frac{1}{2} H^*(f) e^{-i2\pi ft}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} |H(f)| e^{i2\pi ft + i \arg(H(f))} + \frac{1}{2} |H(f)| e^{-i2\pi ft - i \arg(H(f))}$$

$$y(t) = |H(f)| \cos(2\pi ft + \arg H(f))$$

Lineaarinen järjestelmä ei aiheuta taajuuden muuntumista.

22.11.2007

4

Esimerkki (1/1)

- 1. asteen differentiaali yhtälö

$$\frac{d}{dt} y(t) = -ay(t) + bu(t)$$

- Ratkaisu syötteelle $u(t) = e^{i2\pi ft}$:

$$y(t) = \frac{b}{i2\pi f + a} e^{i2\pi ft}$$

- Ratkaisu syötteelle $u(t) = e^{-i2\pi ft}$:

$$y(t) = \frac{b}{-i2\pi f + a} e^{-i2\pi ft}$$

- Ratkaisu syötteelle $u(t) = \cos(2\pi ft) = \frac{1}{2}(e^{i2\pi ft} + e^{-i2\pi ft})$:

$$y(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{i2\pi f + a} e^{i2\pi ft} + \frac{b}{-i2\pi f + a} e^{-i2\pi ft} \right)$$

22.11.2007

5

Esimerkki (1/2)

- Ratkaisu voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{b(-i2\pi f + a)}{(2\pi f)^2 + a^2} e^{i2\pi ft} + \frac{b(i2\pi f + a)}{(2\pi f)^2 + a^2} e^{-i2\pi ft} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(2\pi f)^2 + a^2} e^{i2\pi ft + i \arctan\left(\frac{-2\pi f}{a}\right)} + \sqrt{(2\pi f)^2 + a^2} e^{-i2\pi ft + i \arctan\left(\frac{2\pi f}{a}\right)}}{(2\pi f)^2 + a^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{i2\pi ft - \arctan\left(\frac{-2\pi f}{a}\right)} + e^{-i2\pi ft + \arctan\left(\frac{2\pi f}{a}\right)}}{\sqrt{(2\pi f)^2 + a^2}} \\ &= \frac{1}{\underbrace{\sqrt{(2\pi f)^2 + a^2}}_{|H(f)|}} \cos \left(2\pi ft - \underbrace{\arctan\left(\frac{2\pi f}{a}\right)}_{+\arg(H(f))} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$$\arg(a+ib) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

22.11.2007

6

Taajuusvaste

- Taajuusvaste on järjestelmän vaste sini-muotoiseen herätteeseen.
- **Siirtofunktio**

$$H(f) = |H(f)| e^{j \arg(H(f))} = A(f) e^{-j\phi(f)}$$

- **Amplitudivaste** (amplitudi funktio)

$$A(f) = |H(f)|$$

- **Vaihevaste** (vaihefunktio)

$$\phi(f) = -\arg(H(f))$$

- **Vaiheviive** (kantoaallon viive) [phase/carrier delay]

Vaihesiirto vastaa aikatasossa signaalin viivästymistä

$$t_d(f) = \phi(f) / 2\pi f$$

$$F\{\delta(t - t_d)\} = e^{-i2\pi f t_d}$$

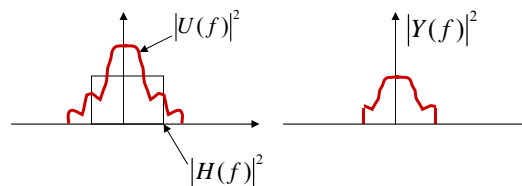
22.11.2007

7

Taajuusvaste

- Vasteen $y(t)$ Fourier-muunnos: $Y(f) = H(f)U(f)$
- Vasteen $y(t)$ spektritiheys saadaan impulssivasteen ja herätteen spektritiheyksien tulona:

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |U(f)|^2$$



$|H(f)|^2$ Tehnsiirtofunktio

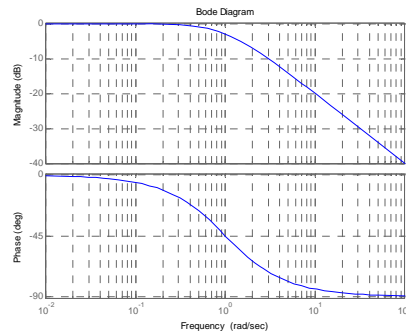
- Järjestelmä suodattaa signaalia $u(t)$

22.11.2007

8

Boden käyrät

- **Vahvistuskäyrä**
 - Tehonsiirtofunktio
logaritmi
kulmataajuuden $\omega = 2\pi f$ (rad/s) funktiona
 $20 \log_{10}(|H(\omega/(2\pi))|)$
- **Vaihekäyrä**
 - Vaiheaste asteina
 $\phi(f) \cdot 180^\circ/(\pi)$
kulmataajuuden $\omega = 2\pi f$ (rad/s) funktiona
 $\phi(\omega/(2\pi))$



22.11.2007

9

Amplitudi ja vaihevääristymät

- Halutaan siirtää signaali $u(t)$ järjestelmän läpi, ilman että signaalin muoto vääristyy.
 - Ideaalitapauksessa $y(t) = a \cdot u(t - \tau_d)$, missä $a > 0$ on vakio
 - Tätä vastaa taajuusvaste $Y(f) = a \cdot U(f) \cdot e^{-i2\pi f \tau_d}$
 - Tällöin järjestelmän siirtofunktion pitää olla vakio $H(f) = a \cdot e^{-i2\pi f \tau_d}$ koko signaalin $u(t)$ kaistalla
 - Käytännössä näin ei tapahdu, vaan signaali vääristyy
 - **Amplitudi vääristymä:** $A(f) \neq A$
 - **Vaihevääristymä:** $\phi(f) \neq 2\pi f \tau$

22.11.2007

10

Amplitudi ja vaihevääristymät

- **Ryhmäkulkuaika**

$$t_g(f) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \phi(f)$$

kuvaa vaiheen muutosta taajuuden funktiona.

- Idealisessa tapauksessa t_g on taajuudesta riippumaton vakio.
- **Vaihevääristymä** kaistanpäästösignaaliille $u(t)$ kaistalla $(f_c - B/2, f_c + B/2)$, f_c kantoaallon taajuus

$$\Delta t_g = \max_{f \in (f_c - B/2, f_c + B/2)} |t_g(f) - t_g(f_c)|$$

$$\Delta \phi = \int_f^{f+\Delta f} d\phi \leq 2\pi \Delta t_g \Delta f$$

Vaiheen muutos taajuuden muutoksen suhteen

22.11.2007

11

Vaihevääristymät

- Tarkastellaan lineaarisesti moduloitua signaalia, jonka kaistanleveys on B

$$u(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$U(f) = \frac{1}{2} X(f + f_c) + \frac{1}{2} X(f - f_c)$$

- Signaali kulkee kanavan (järjestelmän) läpi.
- Kanavan siirtofunktio on

$$H(f) = a e^{-i(2\pi f \tau_g + \phi_0 \operatorname{sgn} f)}$$

$$A(f) = a$$

Amplitudivaste

$$\phi(f) = 2\pi f \tau_g + \phi_0, \quad f > 0$$

Vaihevaste

- Vaiheviive

$$t_d(f) = \tau_g + \frac{\phi_0}{2\pi f}$$

- Ryhmäviive

$$22.11.2007 \quad t_g(f) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(f)}{df} = \tau_g$$

12

Vaihevääristymät

- Ulostulosignaali taajuustasossa $F\{\cos(2\pi f_c t + \phi)\} = \delta(f + f_c)e^{-i\phi} + \delta(f - f_c)e^{i\phi}$

$$Y(f) = H(f)U(f) = \frac{1}{2}X(f + f_c)ae^{-i2\pi f\tau_g + i\phi_d} + \frac{1}{2}X(f - f_c)e^{-i2\pi f\tau_g - i\phi_d}$$

- ja aikatasossa

$$y(t) = x(t - \tau_g) \cos(2\pi f_c (t - \tau_g) - \phi_d)$$

$$y(t) = x(t - \tau_g) \cos(2\pi f_c (t - t_d(f))) \quad t_d(f) = \tau_g + \frac{\phi_0}{2\pi}$$

Ryhmäviive

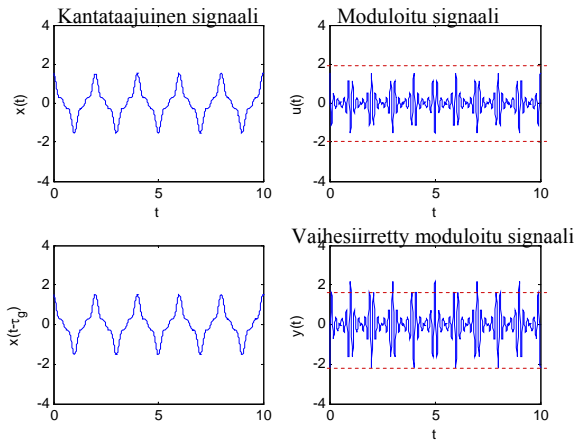
Vaiheviive / kantaallon viive

22.11.2007

13

Vaihevääristymät

- Pelkkä vakio vaiheensiirto ϕ_0 voi aiheuttaa signaalin vakavaa vääristymistä



22.11.2007

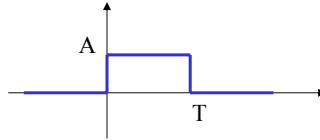
$$y(t) = x(t - \tau_g) \cos(2\pi f_c (t - \tau_d))$$

14

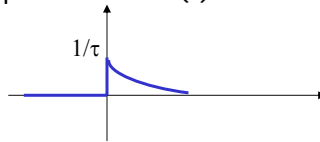
Esimerkki I (1/4)

- Tarkastellaan T:n mittaista jännitepulssia $u_{in}(t)$, jonka amplitudi on A.

$$u_{in}(t) = A\Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$$



- RC-suodattimen impulssivaste $h(t) = 1/\tau e^{-t/\tau}$, $\tau = RC$



- Ratkaistaan suodattimen ulostulo $u_{out}(t)$

22.11.2007

15

Esimerkki I (2/4)

- Jännitepulssin Fourier-muunnos

$$U_{in}(f) = F\{u_{in}(t)\} = F\left\{A\Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)\right\} = AT \operatorname{sinc}(fT) e^{-i2\pi f \frac{T}{2}} = A \frac{1 - e^{-i2\pi fT}}{i2\pi f}$$

$$F\{x(t - \tau)\} = X(f)e^{-i2\pi f\tau}$$

$$F\left\{A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = AT \operatorname{sinc}(fT)$$

- Impulssivasteen Fourier-muunnos

$$H(f) = F\{h(t)\} = F\{\tau e^{-t/\tau}\} = \frac{1}{i2\pi f\tau + 1}$$

- Suodatettu signaali

$$U_{out}(f) = H(f)U_{in}(f) = A \frac{1 - e^{-i2\pi fT}}{i2\pi f} H(f)$$

22.11.2007

16

Esimerkki I (3/4)

- Ulostulojännitteen Fourier-muunnos

$$U_{out}(f) = H(f)U_{in}(f) = A \frac{1}{i2\pi f} H(f) (1 - e^{-i2\pi f T})$$

$$= X(f) - X(f)e^{-i2\pi f T}, \quad X(f) = A \frac{1}{i2\pi f} H(f)$$

- Ratkaistaan $X(f)$:n käänteismuunnos

$$F \left\{ \int x(t) dt \right\} \Leftrightarrow \frac{X(f)}{i2\pi f}$$

$$x(t) = F^{-1} \{ X(f) \} = F^{-1} \left\{ A \frac{1}{i2\pi f} H(f) \right\} = \begin{cases} A \int_0^t \frac{1}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau} t} dt = A \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} t} \right) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Ulostulojännitteen lausekkeeksi saadaan

$$u_{out}(t) = F^{-1} \{ U_{out}(f) \} = F^{-1} \{ X(f) - X(f)e^{-i2\pi f T} \} = x(t) - x(t-T)$$

$$F \{ x(t-\tau) \} = X(f)e^{-i2\pi f \tau}$$

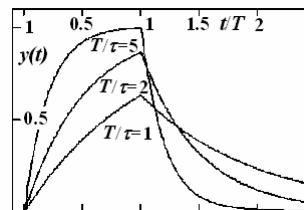
22.11.2007

17

Esimerkki I (4/4)

- Suodatettu pulssi

$$u_{out}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} t} \right) & 0 \leq t \leq T \\ A \left(e^{-\frac{1}{\tau}(t-T)} - e^{-\frac{1}{\tau} t} \right) & t > T \end{cases}$$

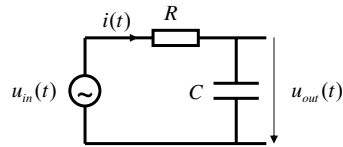


22.11.2007

18

Esimerkki II (1/6)

- Tarkastellaan RC-suodinta



$$i(t) = C \frac{d}{dt} u_{out}(t)$$

$$u_m(t) = Ri(t) + u_{out}(t)$$

$$\frac{d}{dt} u_{out}(t) = \frac{1}{RC} (u_m(t) - u_{out}(t))$$

Impulssivaste

$$\frac{d}{dt} h(t) = \frac{1}{RC} (\delta(t) - h(t))$$

$$\Rightarrow i2\pi f H(f) = \frac{1}{RC} (1 - H(f))$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{\frac{1}{RC}}{i2\pi f + \frac{1}{RC}}$$

$$h(t) = F^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{RC}}{i2\pi f + \frac{1}{RC}} \right\} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

22.11.2007

19

Esimerkki II (2/6)

- Jos $RC=1$, niin

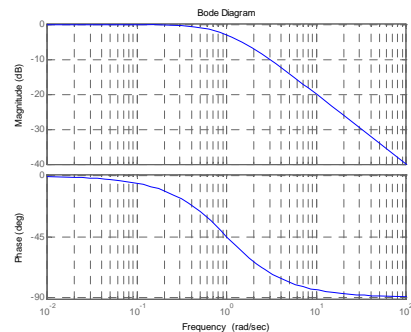
$$h(t) = \exp(-t), \quad t \geq 0$$

$$H(f) = \int_0^{\infty} \exp(-(i2\pi f + 1)t) dt = \frac{1}{i2\pi f + 1}$$

$$A(f) = |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi f)^2 + 1}}$$

$$\arg\{|H(f)|\} = \text{atan}(-2\pi f)$$

$$\phi(f) = -\arg\{H(f)\} = \arctan(2\pi f)$$



22.11.2007

$\omega = 2\pi f$

20

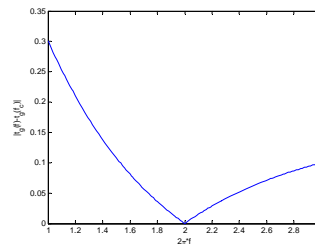
Esimerkki II (3/6)

- Ryhmäviive

$$t_g(f) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(f)}{df} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \arctan(2\pi f) = \frac{1}{1+(2\pi f)^2}$$

- Ryhmäviiveen muutos kaistalla $f \in [1/(2\pi), 3/(2\pi)]$

$$\Delta t_g = \max_{f \in \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{3}{2\pi}\right)} \left| t_g(f) - t_g\left(\frac{2}{2\pi}\right) \right| \approx 0.3$$



22.11.2007

21

Esimerkki II (4/6)

- Vaihevääristymä

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \int_f^{f+\Delta f} d\phi \Rightarrow \Delta\phi = \int_f^{f+\Delta f} t_g(f) 2\pi df \\ &= \int_f^{f+\Delta f} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \arctan(2\pi f) \right) 2\pi df = \arctan(2\pi(f+\Delta f)) - \arctan(2\pi f) \end{aligned}$$

- Vaihevääristymä kaistalla $f \in [1/(2\pi), 3/(2\pi)]$

$$\Delta\phi = \arctan(3) - \arctan(1) \approx 0.4636 \text{ rad} \approx 26.5651^\circ$$

- Ryhmäviiveen avulla laskettu yläraja

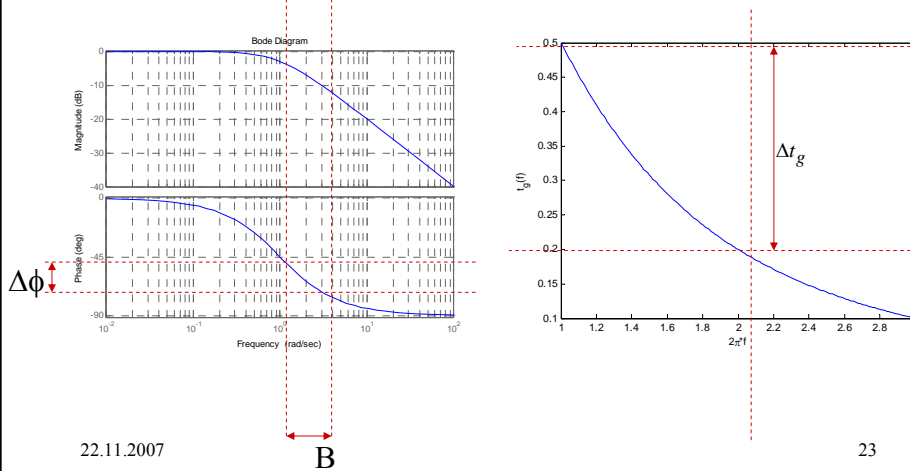
$$\Delta\phi \leq 2\pi \Delta t_g \Delta f = 2\pi \cdot 0.3 \cdot \frac{2}{2\pi} = 0.6 \text{ rad} \approx 34.3775^\circ$$

22.11.2007

22

Esimerkki II (5/6)

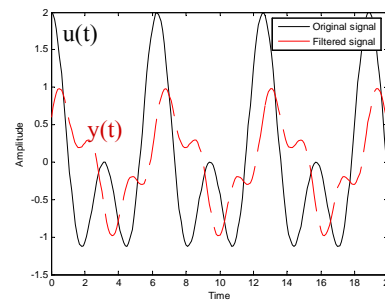
$$\Delta\phi = \arctan(3) - \arctan(1) \approx 0.4636 \text{ rad} \approx 26.5651^\circ$$



Esimerkki II (6/6)

- Tarkastellaan herätettä
- Suodattomen vast on tällöin

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \left| H\left(\frac{1}{2\pi}\right) \right| \cos\left(t + \arg H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right) \\
 &+ \left| H\left(\frac{3}{2\pi}\right) \right| \cos\left(3t + \arg H\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t - \arctan(1)) \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{10}} \cos(3t - \arctan(3))
 \end{aligned}$$



↔
≈ 0.2 s viive

22.11.2007

24

Taajuusvasteen tekijät

- Taajuustasossa osoittajan tekijöiden itseisarvot kerrotaan keskenään ja ne jaetaan nimittäjän tekijöiden itseisarvoilla. Osoittajan tekijöiden napakulmat lasketaan yhteen ja niistä vähennetään nimittäjän tekijöiden napakulmat.

s-tason siirtofunktio f-tason siirtofunktio

$$G(s) = \frac{s-a}{(s-b)(s-c)} \Rightarrow G(i2\pi f) \triangleq G(f) = \frac{i2\pi f - a}{(i2\pi f - b)(i2\pi f - c)}$$

$$|G(f)| = \frac{|i2\pi f - a|}{|i2\pi f - b| \cdot |i2\pi f - c|} = \frac{\sqrt{(i2\pi f)^2 + a^2}}{\sqrt{(i2\pi f)^2 + b^2} \cdot \sqrt{(i2\pi f)^2 + c^2}}$$

$$\angle\{G(f)\} = \angle\{i2\pi f - a\} - \angle\{i2\pi f - b\} - \angle\{i2\pi f - c\}$$

\angle kompleksin luvun kulma (arg)

22.11.2007

25

Taajuusvasteen tekijät

- Tehonsiirtofunktio esitetään usein desibeleinä

$$10 \log_{10}(|G(f)|^2) = 20 \log_{10}(|G(f)|)$$

$$= 20 \log_{10}(|G(f)|) = 20 \log_{10} \left(\frac{|i2\pi f - a|}{|i2\pi f - b| \cdot |i2\pi f - c|} \right)$$

$$= 20 \cdot (\log_{10}|i2\pi f - a| - \log_{10}|i2\pi f - b| - \log_{10}|i2\pi f - c|)$$

$$\log \left(\frac{p_1 p_2}{p_3} \right) = \log(p_1) + \log(p_2) - \log(p_3)$$

22.11.2007

26

Taajuusvasteen tekijät

- Desibelin yksikkö dB on suhteellinen yksikkö
- Tehonsiirron tapauksessa yksikkö on
 - dBW (dB verrattuna 1 W: iin)
 - dBm (dB verrattuna 1 mW: iin)
 - dBp (dB verrattuna 1 pW: iin)
 - dBf (dB verrattuna 1 fW: iin)

$$\begin{aligned} 1mW &= 10^{-3}W \\ 10 \log_{10} \left(\frac{10^{-3}W}{W} \right) &= -30 \log_{10} 10 \text{ dBW} \\ &= -30 \text{ dBW} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 200mW &= 0.2W \\ 10 \log_{10} \left(\frac{0.2W}{10^{-3}W} \right) &= 10 \log_{10} \left(\frac{200mW}{1mW} \right) \\ &= 10 \log_{10} (200) \text{ dBm} \approx 23 \text{ dBm} \\ 10 \log_{10} \left(\frac{0.2W}{1W} \right) &= 10 \log_{10} (0.2) \text{ dBW} \approx -7 \text{ dBW} \end{aligned}$$

22.11.2007

27

Taajuusvasteen tekijät

- Jännitesignaalin tapauksessa amplitudivasteen $|G(f)|$:n yksikkö on voltia V
 - dBV (dB verrattuna 1 V: iin)
 - dBmV (dB verrattuna 1 mV: iin)

$$10 \log_{10}(|G(f)|) \text{ dBV mutta } 20 \log_{10}(|G(f)|) \text{ dBW}$$

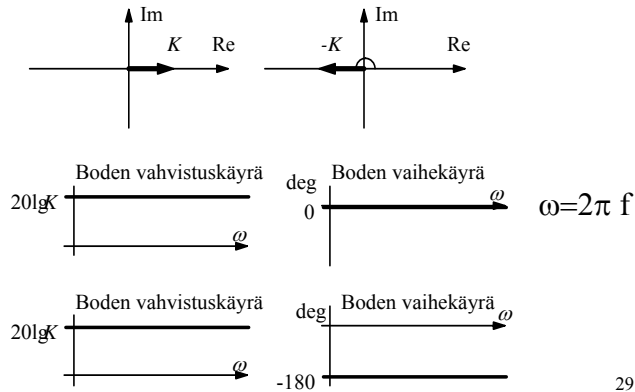
22.11.2007

28

Vakiokerroin

- Siirtofunktio on reaalinen ja vakio

$$\begin{cases} |G_1(f)| = |G_2(f)| = K \\ \angle\{G_1(f)\} = 0, \quad \angle\{G_2(f)\} = -\pi \quad \text{rad} = -180^\circ \end{cases}$$



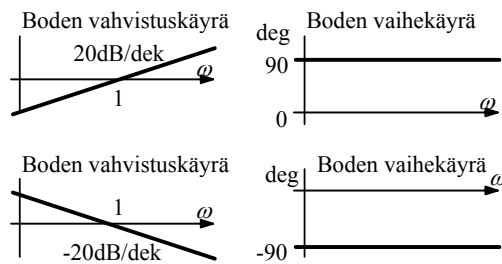
22.11.2007

29

Integraattori ja derivaattori

$$\begin{cases} G_1(f) = i2\pi f & \text{Derivaattorin siirtofunktio} \\ G_2(f) = \frac{1}{i2\pi f} = -i\frac{1}{2\pi f} & \text{Integraattorin siirtofunktio} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |G_1(f)| = 2\pi f, \quad |G_2(f)| = \frac{1}{2\pi f} \\ \angle\{G_1(j\omega)\} = \frac{\pi}{2}, \quad \angle\{G_2(j\omega)\} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} = -90^\circ \end{cases}$$



22.11.2007

30

Viive

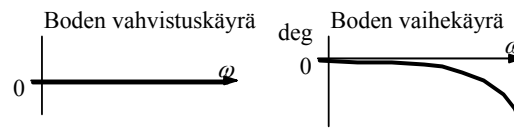
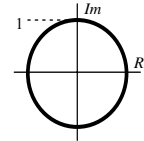
- Viive aikatasossa vastaa vaihesiirtoa taajuustasossa

$$G(f) = e^{-i2\pi f\tau}$$

$$= \cos(2\pi f\tau) - j \cdot \sin(2\pi f\tau)$$

$$|G(f)| = \sqrt{\cos^2(2\pi f\tau) + \sin^2(2\pi f\tau)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\angle\{G(f)\} = \arctan\left(\frac{-\sin(2\pi f\tau)}{\cos(2\pi f\tau)}\right) = -\arctan(\tan(2\pi f\tau)) = -2\pi f\tau$$



22.11.2007

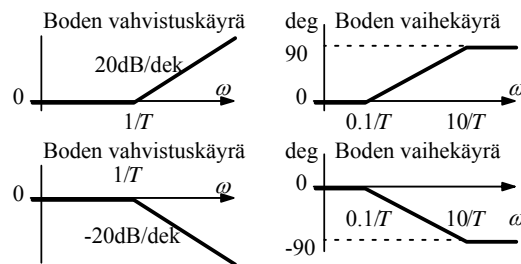
31

Ensimmäisen kertaluvun termit

- 1. kertaluvun siirtofunktiot

$$\begin{cases} G_1(f) = i2\pi fT + 1 \\ G_2(f) = \frac{1}{i2\pi fT + 1}, T > 0 \end{cases}$$

- Approksimaatio Boden diagrammille



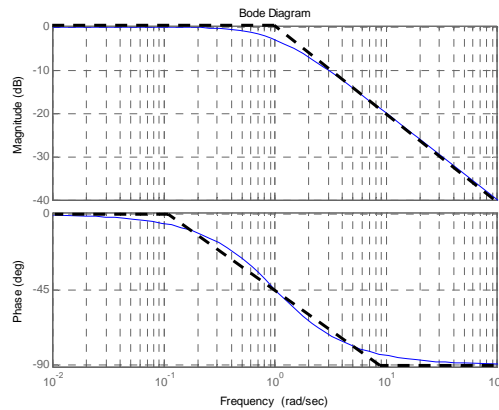
22.11.2007

32

Ensimmäisen kertaluvun termit

- 1. kertaluvun järjestelmän Boden kuvaaja

$$G_2(f) = \frac{1}{i2\pi f + 1}$$



22.11.2007

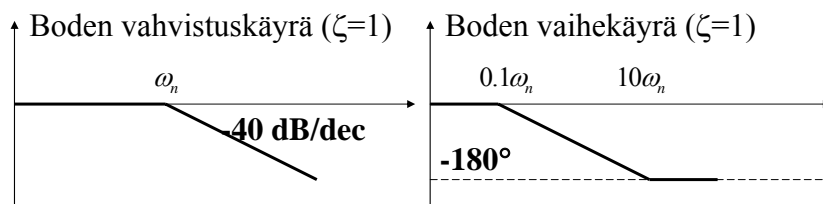
33

Toisen kertaluvun termit

- Toisenkertaluvun siirtofunktio

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow G(f) = \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - (2\pi f)^2) + i(2\pi f)2\zeta\omega_n}$$

$$= \frac{1}{1 - ((2\pi f)/\omega_n)^2 + 2\zeta((2\pi f)/\omega_n) \cdot j} \quad \text{Resonanssitaajuus: } \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$



22.11.2007

34

Toisen kertaluvun termit

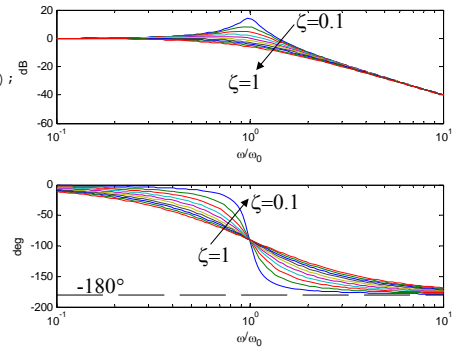
```

w0=1;
w=logspace(-1,1,100);
zeta=0.1:0.1:1;

for k=1:length(zeta)
    sys{k}=tf([0 0 w0^2],[1
    2*zeta(k)*w0 w0^2]);
    [mag(k,:),pha(k,:)]=bode(sys{k},w);
end;

subplot(2,1,1)
semilogx(w/w0,20*log10(mag))
xlabel('\omega/\omega_0')
ylabel('dB')

subplot(2,1,2)
semilogx(w/w0,pha,w/w0,-
    180*ones(size(w)),'k--')
xlabel('\omega/\omega_0')
ylabel('deg')
    
```



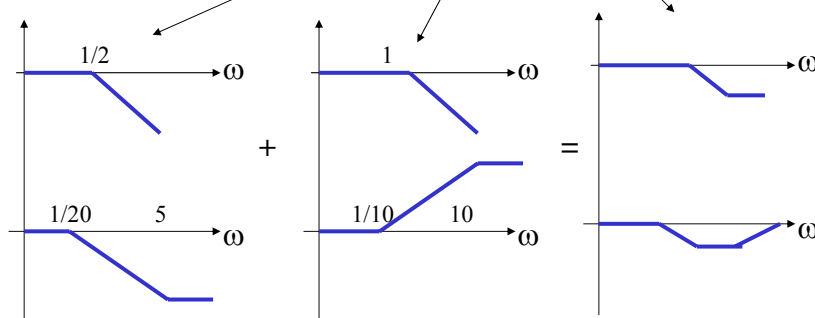
22.11.2007

35

Esimerkki (1/2)

- Tarkastellaan järjestelmää

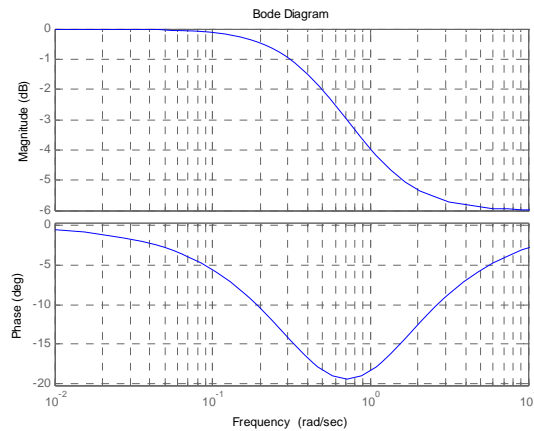
$$G(s) = \frac{s+1}{2s+1} \Rightarrow G(f) = \frac{1}{i2\pi f 2+1} \cdot (i2\pi f + 1) = \frac{i2\pi f + 1}{i2\pi f 2+1}$$



22.11.2007

36

Esimerkki 2/2

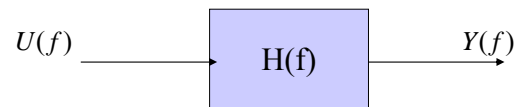


22.11.2007

37

Stabiilisuus

- Tarkastellaan stabiilin järjestelmää $H(f) = A(f)e^{-i\phi(f)}$



- Tarkastellaan sini-muotoista herätettä

$$H(f) = A(f)e^{-i\phi(f)}$$

$$u(t) = \cos(2\pi f t)$$

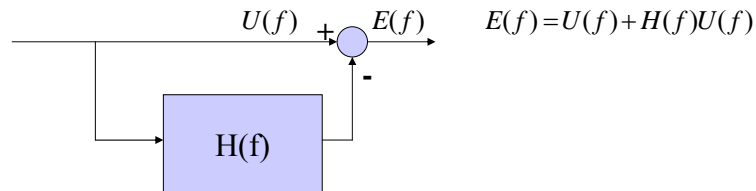
$$y(t) = A(f)\cos(2\pi f t - \phi(f))$$

22.11.2007

38

Stabiilisuus

- Myötäkytkentä



$$e(t) = \cos(2\pi f) - A(f)\cos(2\pi f - \phi(f))$$

- Jos vaihesiirtoa on 180° erosignaali $e(t)$ interferoi konstruktiiivisesti (merkki vaihtuu)

$$e(t) = (1 + A(f))\cos(2\pi f)$$

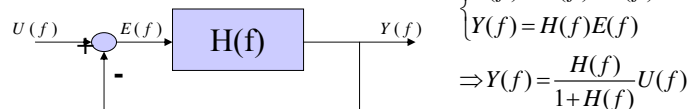
$$|e(t)| > |u(t)|$$

22.11.2007

39

Stabiilisuus

- Tehdään negatiivinen takaisinkytkentä



- Jos järjestelmän H vaihesiirto on -180° , niin signaaliin $u(t)$ summautuu se itse $A(f)$:llä skaalattuna rekursiivisesti

$$e_0(t) = u(t)$$

$$e_1(t) = A(f)e_0(t) + u(t) = (A(f) + 1)u(t)$$

$$e_2(t) = A(f)e_1(t) + u(t) = (A^2(f) + A(f) + 1)u(t)$$

$$e_k(t) = (A^k(f) + A^{k-1}(f) + \dots + A(f) + 1)u(t)$$

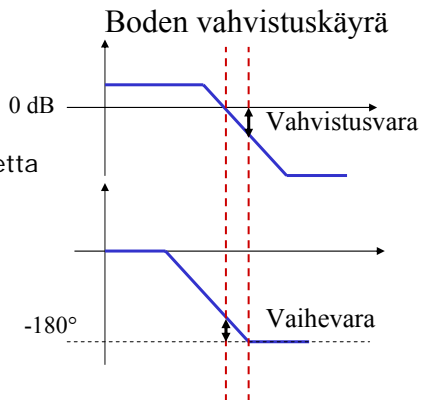
- Summa $1 + A(f) + A(f)^2 + \dots$ konvergoi arvoon $1/(1 - A(f))$, jos $A(f) < 1$, jolloin $y(t)$ pysyy rajoitettuna

22.11.2007

40

Stabiilisuus kriteeri

- Sillä taajuudella, jolla vaihe leikkaa -180° vahvistuksen pitää olla $20\log_{10}(A(f)) < 0$ dB
- **Vahvistusvara:** Kuinkapaljon vahvistusta voidaan kasvattaa ennen kuin takaisinkytketystä järjestelmästä tulee epästabiili
- **Vaihevara:** Kuinkapaljon vaihetta voidaan jättää ennen kuin järjestelmästä tulee epästabiili



22.11.2007

41

Esimerkki I (1/2)

- Ensimmäisenkertaluvun systeemi voidaan tulkita takaisinkytketyksi integraaliksi

$$G(f) = \frac{K}{i2\pi f + K} = \frac{\frac{K}{i2\pi f}}{1 + \frac{K}{i2\pi f}} = \frac{H(f)}{1 + H(f)}$$

- Avoimen silmukan siirtofunktio

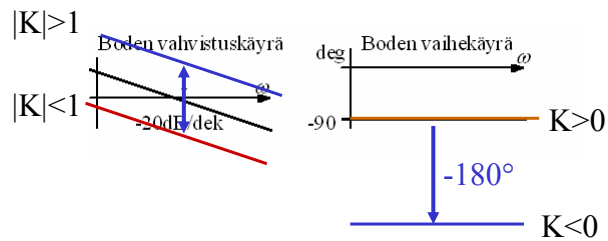
$$H(f) = K \frac{1}{i2\pi f}$$

22.11.2007

42

Esimerkki I (2/2)

- Jos $K < 0$ se vastaa -180° vaihesiirtoa ja $20\log_{10}(|K|)$ vahvistusta
- Jos $K > 0$ se vastaa 0° vaihesiirtoa ja $20\log_{10}(|K|)$ vahvistusta



- Jos $K < 1$ vaihe on -270° kaikilla f , koska $|H(f)| \rightarrow \infty$ $f \rightarrow 0$, ei takaisinkytketty järjestelmä ole stabiili
- Jos $K > 1$ vaihe on -90° kaikilla f , joten takaisinkytketty järjestelmä on stabiili

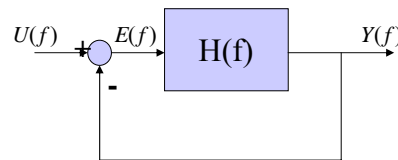
22.11.2007

43

Esimerkki II (1/2)

- Tarkastellaan 3. kertaluvun suodatinta

$$H(f) = K \frac{1}{(i2\pi f + 1)^2}$$



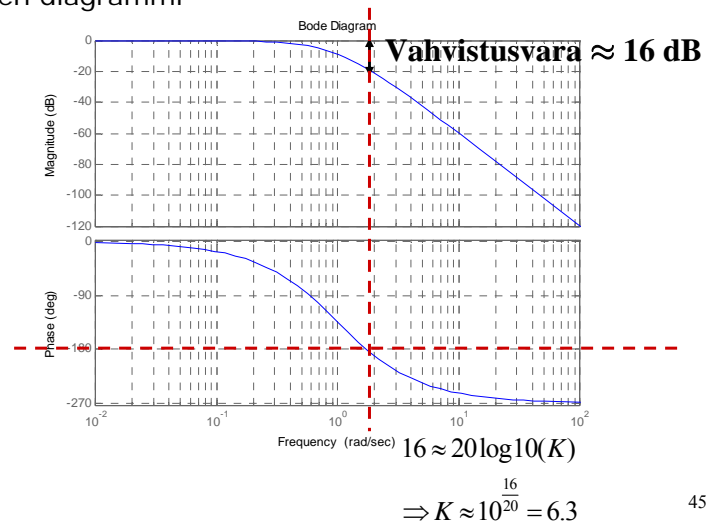
- Ratkaistaan suurin mahdollinen K :n arvo, jolla takaisinkytketty järjestelmä on stabiili

22.11.2007

44

Esimerkki II (2/2)

- Bode diagrammi



22.11.2007

45