Luento 8

- Lineaarinen suodatus
  - Ideaaliset alipäästö, ylipäästö ja kaistanpäästösuodattimet
  - Käytännölliset suodattimet

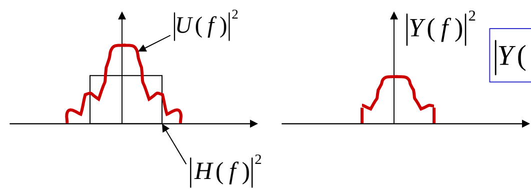
Suodattimien käyttötarkoitus

- Signaalikaistan ulkopuolisen kohinan ja häiriöiden vaimentaminen
- Signaalien erottaminen muista signaaleista esim. radiovastaanottimessa
- Halutun pulssimuodon tai -spektrin generoiminen
- Sovitettu suodatin signaalikohinasuhteen maksimoimiseksi näytteenottohetkellä
- Siirtokanavan aiheuttamien lineaaristen vääristymien korjaus
- Alkuperäisen signaalin rekonstruktio näytteistä
- Dupleksisuodattimet (ylä- ja alasuunnan liikenteen erottaminen omille kaistoilleen)
- Esikorostus/jälkikorjausmenetelmät
- Peilitaajuussignaalin vaimentaminen superhetero-dyneperiaatteella toimivassa radiovastaanottimessa
- jne

Lineaarinen suodatus

- Vasteen y(t) Fourier-muunnos: Y(f)=H(f)U(f)

- Vasteen y(t) spektritiheys saadaan impulssivasteen ja herätteen spektritiheyksien tulona:



$$\boxed{|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |U(f)|^2}$$

$|H(f)|^2$ ***Tehonsiirtofunktio***

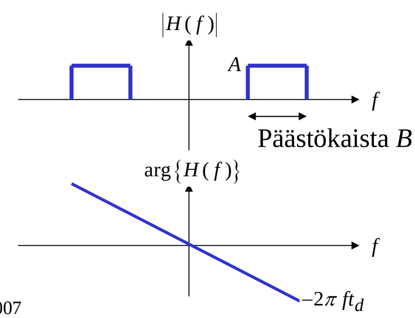
- Järjestelmä suodattaa signaalia u(t)

Ideaaliset alipäästö, ylipäästö ja kaistanpäästösuodattimet

- Ideaalinen suodatin
  - Päästökaistalla: A(f)=A ja ϕ(f)=2πft$_d$

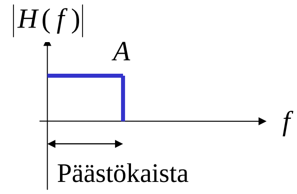
    => Suodin ei aiheuta amplitudi ja vaihevääristymiä
  - Estokaistalla amplitudivaste A(f)=0

    => Estokaistalla oleva signaali ei näy suotimen ulostulossa lainkaan

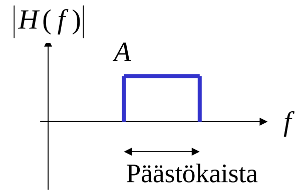


Ideaaliset alipäästö, ylipäästö ja kaistanpäästösuodattimet

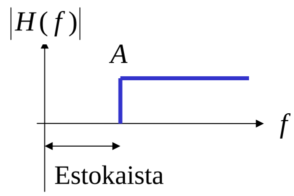
- Alipäästösuodatin



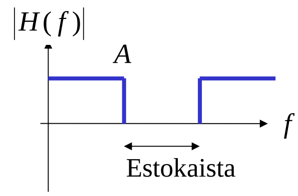
- Kaistanpäästösuodatin



- Ylipäästösuodatin



- Kaistanestosuodatin

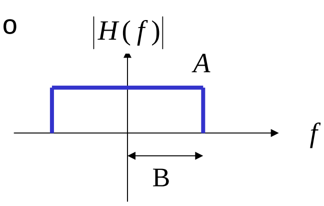


Ideaalinen alipäästösuodatin

- Tarkastellaan ideaalista alipäästösuodinta, jonka päästökaistan leveys on B.
  - Suodattimen siirtofunktio

$$\boxed{H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)e^{-i2\pi f t_d}}$$

$$\boxed{\Pi(f) = \begin{cases} 1 & |f| \le \frac{1}{2} \\ 0 & |f| > \frac{1}{2} \end{cases}}$$



  - Suodattimen impulssivaste

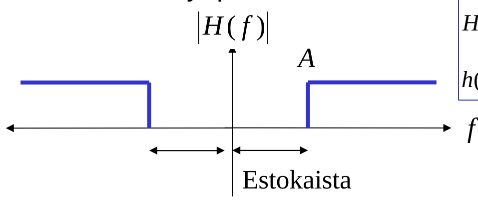
$$\boxed{h(t) = F^{-1}\{H(f)\} = 2BA\,\mathrm{sinc}\big(2B(t - t_d)\big)}$$

Ideaaliset yli- ja kaistanpäästösuodattimet

- Ideaalinen ylipäästösuodin

$$H(f)=\left(1-\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)\right)e^{-i2\pi f t_d}$$

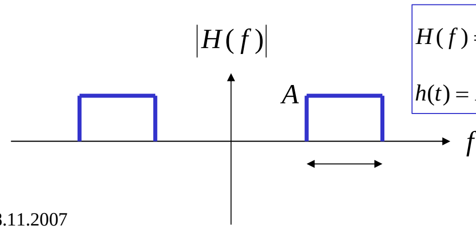
$$h(t)=\delta(t-t_d)-2BA\operatorname{sinc}\left(2B\left(t-t_d\right)\right)$$



- Ideaalinen kaistanpäästösuodin

$$H(f)=\left(\Pi\left(\frac{f+f_c}{2B}\right)+\Pi\left(\frac{f-f_c}{2B}\right)\right)e^{-i2\pi f t_d}$$

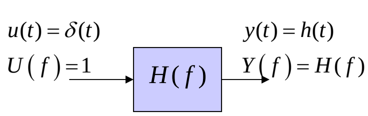
$$h(t)=BA\operatorname{sinc}\left(2B\left(t-t_d\right)\right)\cos\left(2\pi f_c t\right)$$

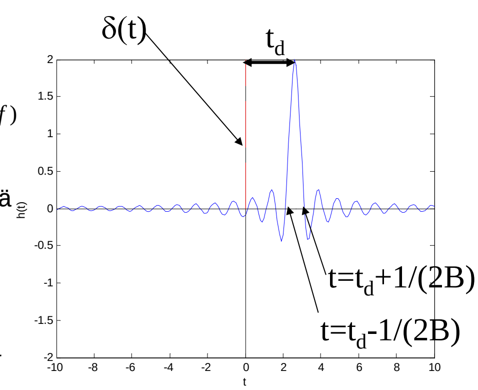


28.11.2007 7

Ideaalinen alipäästösuodin

- Alipäästösuodattimen impulssivaste





Impulssiheräte ajanhetkellä t=0 näkyy vasteessa y(t) myös ajanhetkinä t<0

=> Ideaalinen alipäästösuodin ei ole kausaalinen eikä sitä voida realisoida käytännössä

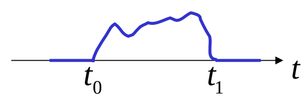
- Myös ideaaliset yli-, esto- ja kaistanpäästösuodattimet ovat epäkausaalisia.

28.11.2007 8

Aika- ja taajuustason rajoitukset

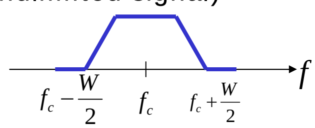
- Aikarajoitettu (Time limited signal)

  $v(t) = 0, \quad t < t_0 \vee t > t_1$



- Kaistarajoitettu signaali (Bandlimited signal)

  $V(f) = 0, \quad |f| > W$

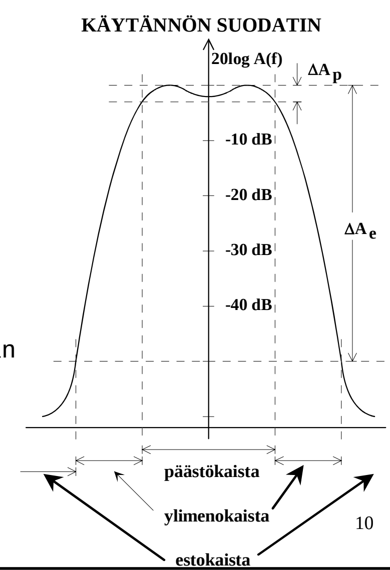


- Signaali ei voi olla rajoitettu sekä aika- että taajuustasossa.

=> Ei ole mahdollista tehdä suodatinta, jonka impulssivaste olisi aikatasossa rajattu ja jonka päästökaista olisi taajuustasossa rajattu

Käytännön suodattimet

- Käytännön suodattimessa
  - **Päästökaistan** (passband) amplitudivaste ei ole vakio vaan sillä sallitaan ΔA_p suuruisia amplitudieroja.
  - Päästökaistaa seuraa **ylimenokaista** (transition region), jolla amplitudivaste laskee nopeasti
  - **Estokaistalla** (stopband) amplitudivaste valitaan sovelluksen kannalta riittävän pieneksi. ΔA_e kuvaa estokaistalle vaadittua vaimennusta päästökaistan maksimiin nähden



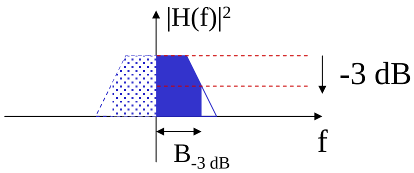
Päästökaista

- **Puolentehon kaistanleveys** kertoo taajuuskaistan, missä signaalin amplitudi erot ΔA on pienempi kuin

$$\Delta A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Erot tehonsiirrossa kaistalla on tällöin enintään 3dB

$$\frac{|H(f)|^2}{\max_f |H(f)|^2} \le \frac{1}{2}$$

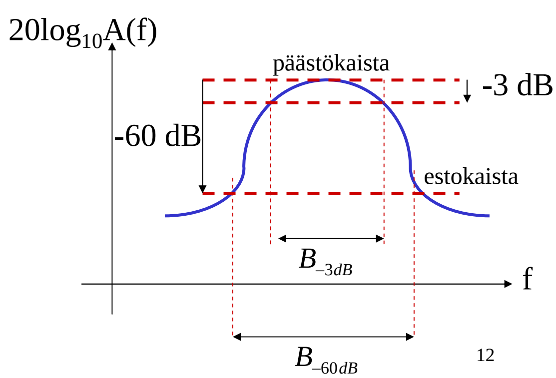


28.11.2007 11

Selektiivisyys

- Useissa käytännön sovelluksissa tavoitteena on mahdollisimman kapea ylimenokaista.
- Suodattimen selektiivisyys kertoo ylimenokaistan koosta
- Määritellään selektiivisyyssuhde r_{sel} suodattimen 3dB ja -60 dB kaistanleveyksien suhteena

$$\boxed{r_{sel} = \frac{B_{-3dB}}{B_{-60dB}}}$$

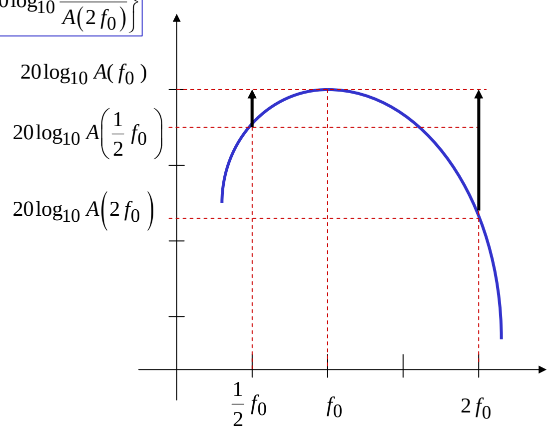


28.11.2007 12

Selektiivisyys

- Oktaaviselektiivisyys

$$OS = \min\left\{20\log_{10}\frac{A(f_0)}{A(0{,}5f_0)}, 20\log_{10}\frac{A(f_0)}{A(2f_0)}\right\}$$



RC-suodatin

- Siirtofunktio

$$H(f) = \frac{1}{i2\pi f\tau_1 + 1}, \quad \tau = RC$$

- Amplitudifunktio

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi f\tau_1)^2 + 1}}$$

maksimi löytyy taajuudelta f=0 Hz

A(0)=1

- -3 dB päästökaista

$$\frac{A(B_{-3})}{A(0)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi B_{-3}\tau_1)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow (2\pi B_{-3}\tau_1)^2 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow 2\pi B_{-3}\tau_1 = 1$$

$$\Rightarrow B_{-3} = \frac{1}{2\pi\tau_1}$$

- -60 dB kaista

$$\frac{A(B_{-60})}{A(0)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi B_{-60}\tau)^2 + 1}} = \sqrt{10^{-\frac{60}{10}}} = \sqrt{\frac{1}{10^6}}$$

$$\Rightarrow (2\pi B_{-60}\tau)^2 + 1 = 10^6$$

$$\Rightarrow 2\pi B_{-60}\tau = \sqrt{10^6 - 1} \approx 1000$$

$$\Rightarrow B_{-60} = \frac{\sqrt{10^6 - 1}}{2\pi\tau}$$

RC-suodatin

- RC-suotimen selektiivisyys

$$r_{sel} = \frac{B_{-3}}{B_{-60}} = \frac{\frac{1}{2\pi\tau}}{\frac{\sqrt{10^6 - 1}}{2\pi\tau}} = \sqrt{10^6 - 1} \approx 1000$$

Kaksi RC-suodatinta sarjassa

- Siirtofunktio ja amplitudifunktio

$$H(f) = \frac{1}{(i2\pi f \tau_2 + 1)^2}, \quad \tau_2 = RC$$

- Valitaan aikavakio τ siten, että päästökaista on sama kuin edellä $B_{-3} = \frac{1}{2\pi\tau}$

$$A\left(\frac{1}{2\pi\tau_1}\right) = \frac{1}{\left(2\pi \frac{1}{2\pi\tau}\tau_2\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^2 = \sqrt{2} - 1$$

$$\tau_2 = \sqrt{\sqrt{2} - 1}\tau_1 \approx 0.64\tau_1$$

Kaksi RC-suodatinta sarjassa

- -60 dB:n kaista

$$A(B_{-60}) = \frac{1}{(2\pi B_{-60}\tau_2)^2+1} = \sqrt{10^{-\frac{60}{10}}} = \frac{1}{1000}$$

$$\Leftrightarrow (2\pi B_{-60}\tau_2)^2+1 = 1000$$

$$\Leftrightarrow B_{-60} = \sqrt{999}\,\frac{1}{2\pi\tau_2} = \sqrt{\frac{999}{\sqrt{2}-1}}\,\frac{1}{2\pi\tau_1} \qquad \boxed{\tau_2 = \sqrt{\sqrt{2}-1}\,\tau_1 \approx 0.64\tau_1}$$

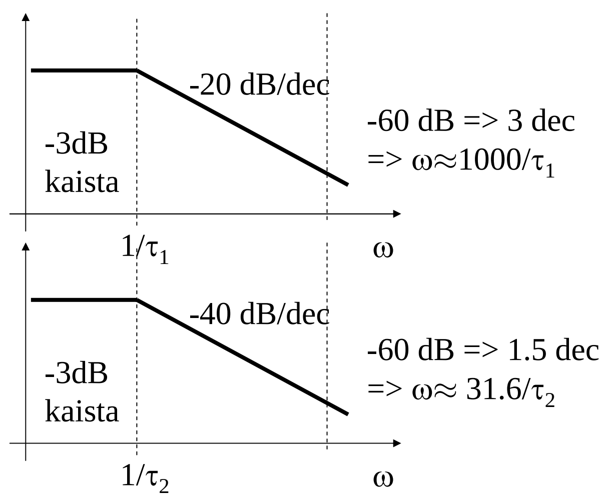
$$= \sqrt{\frac{999}{\sqrt{2}-1}}\,B_{-3}$$

$$r_{sel} = \frac{r_{-3}}{r_{-60}} = \sqrt{\frac{999}{\sqrt{2}-1}} \approx 49{,}1$$

- Toisen asteen suodattimella saadaan huomattavasti parempi selektiivisyys

K1. ja 2. kertaluvun RC suotimet

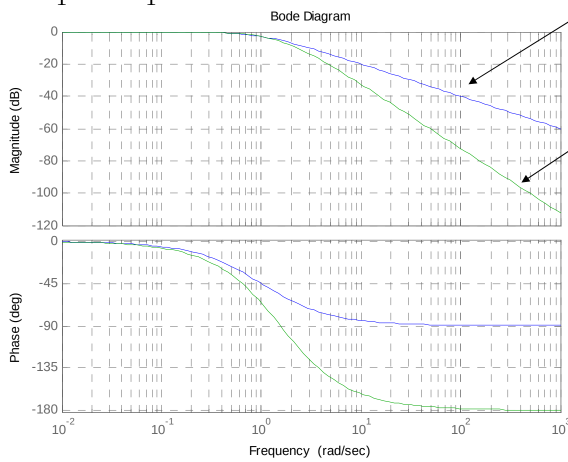
- Boden amplitudikäyrän approksimaationt



1. ja 2. kertaluvun RC suotimet

- RC-suodatin ja kaksi RC-suodatinta sarjassa

$\tau_2 = \sqrt{\sqrt{2}-1}\tau_1 \approx 0.64\tau_1$



1. asteen RC-suodatin

2. asteen RC-suodatin

Käytännön suodattimet

- Käytännölliset lineaariset suodattimet ovat kausaalisia, ja ne esitetään usein siirtofunktion avulla

$$\boxed{H(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{(s-z_1)^{M_1}(s-z_2)^{M_2}\dots(s-z_m)^{M_m}}{(s-p_1)^{N_1}(s-p_2)^{N_2}\dots(s-p_N)^{N_n}}}$$

- Suodattimet valitaan stabiileiksi, jolloin siirtofunktion navat N(s)=0 ovat kompleksitason vasemmassa puolitasossa.

- Jotta impulssivaste olisi reaalinen, pitää taajuustason siirtofunktion on ***hermiittinen***

$$\boxed{H(f) = H^*(-f), \text{ and } |\mathrm{H}(\mathrm{f})|^2 = H(f)H^*(f)}$$

$\boxed{s = i2\pi f}$

Käytännön suodattimet

- Valitsemalla s-tasossa sopivat nolla- ja napayhdistelmät saadaan haluttuja ominaisuuksia omaavat suodattimet, esim.
  - päästökaistan amplitudivääristymän suhteen (laakalatvaisuus, aaltoilu),
  - päästökaistan kulkuaikavääristymän suhteen,
  - estokaistan vaimennuksen suhteen,
  - ylimenokaistan jyrkkyyden suhteen.
- Erilaisia suodatinperheitä, jotka määrittelevät navat ja nollat halutulle asteluvulle, on esitetty useita.
  - Butterworth
  - Bessel
  - Tšebyshev (Chebyshev)
  - Bessel (Bessel-Thomson)
  - Cauer
  - ...

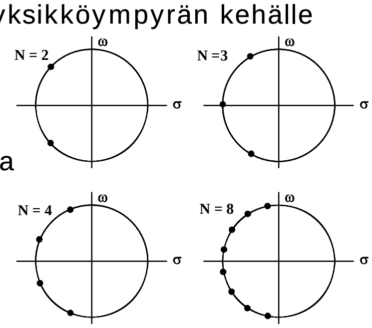
Butterworth suodartinperhe

- Butterworh suodattimen navat ovat 1:n juuria ja ne saadaan ratkaistuksi DeMoivren teoreemasta

$$\sqrt[m]{1} = \sqrt[m]{1e^{jk2\pi}} = \sqrt[m]{1}e^{\left(\frac{j2\pi k}{m}\right)} \quad k = 0,1,2,3,4,\cdots,(m-1)$$

juuret ovat tasajakautuneita yksikköympyrän kehälle taajuustasossa.

- Jotta suodatin olisi stabiili valtaan vain navat, jotka ovat vasemmassa puolitasossa



3. Asteen Butterworth suodin

- Suunnitellaan n=3 asteen Butterworth suodin, jonka kaistanleveys on W
- Jos m=6 saadaan, löydetään DeMoivren teoreemalla kuusi juurta

$$\sqrt[m]{1} = \sqrt[m]{1e^{j2\pi k}} = \sqrt[m]{1}e^{\left(\frac{j2\pi k}{m}\right)} \quad k = 0,1,2,3,4,\cdots,(m\text{-}1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &s_1 = 1\angle 0^\circ = 1, s_2 = 1\angle 60^\circ = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, s_3 = 1\angle 120^\circ = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &s_4 = 1\angle 180^\circ = -1, s_5 = 1\angle 240^\circ = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, s_6 = 1\angle 300^\circ = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}}$$

- Joista valitaan kolme vasemmassa puolitasossa olevaa:

$$\boxed{p_1 = s_3 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2},\ p_2 = s_4 = -1,\ p_3 = s_5 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

3. Asteen Butterworth suodin

- Siirtofunktioksi tulee

$$\boxed{H(s) = \frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}}$$

- Taajuustasossa

$$\boxed{\left|H(f)\right|^2 = H(f)H^*(f)\Big|_{s=i2\pi f} = \frac{1}{(2\pi f)^6 + 1}}$$

- Amplitudi funktio

$$\boxed{A(f) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi f)^6 + 1}}}$$

3. Asteen Butterworth suodin

- Puolentehon kaistanleveys

$$A(f)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi f)^6+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow (2\pi f)^6+1=2$$
$$\Rightarrow f=\frac{1}{2\pi}$$

- Haluttu puolentehon kaistanleveys W saadaan valitsemalla s=s/2πW

$$H\left(\frac{s}{2\pi W}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi W}\right)^3 s^3+2\left(\frac{1}{2\pi W}\right)^2 s^2+2\left(\frac{1}{2\pi W}\right)s+1}$$
$$=\frac{(2\pi W)^3}{s^3+2(2\pi W)s^2+2(2\pi W)^2 s+(2\pi W)^3}$$

3. Asteen Butterworth

- Siirtofunktioksi saadaan siis

$$H\left(\frac{s}{2\pi W}\right)=\frac{(2\pi W)^3}{s^3+2(2\pi W)s^2+2(2\pi W)^2 s+(2\pi W)^3}$$

- Tätä vastaa amplitudi funktio

$$A(f)=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f}{W}\right)^6+1}}$$

Butterworth suodartinperhe

- Suodattimen amplitudifunktio on

$$\boxed{A(f) = \frac{1}{\sqrt{1+(f/W)^{2n}}}}$$

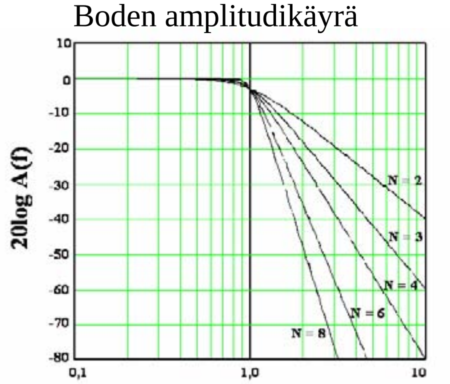
jossa *W* on suodattimen puolen tehon kaistanleveys ja *n* suodattimen aste-luku.

  – Amplitudifunktio on laakalatvainen, siinä ei ole aaltoilua. Laakalatvaisuus merkitsee sitä, että amplitudifunktion n ensimmäistä derivaatta saa arvon nolla taajudella *f* = 0.

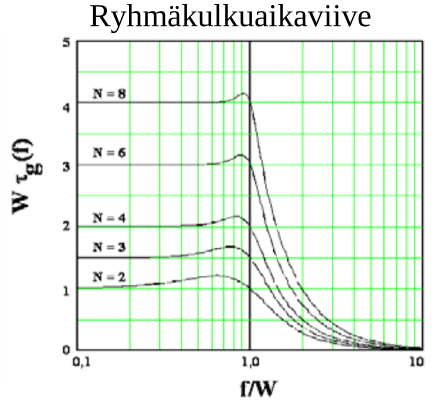
Butterworth suotimet

- Matalilla taajuuksilla ryhmäkulkuaika on vakio, joten taajuusvääristymää ei Butterwoth suotimessa synny, jos sisäänmeno signaalin taajuuskaista << W

Boden amplitudikäyrä



Ryhmäkulkuaikaviive



Butterworth alipäästösuodattimen suunnittelu

- Päästökaista $0 \le f \le f_p$
  - Vaadittu vahvistus $1-\delta_p \le A(f) \le 1+\delta_p$
- Estokaista $f \ge f_s$
  - Vaadittu vaimennus $A(f) \le \delta_s$

1. Ratkaistaan vaadittu asteluku

$$A(f_p) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(f_p/W\right)^{2n}}} = 1-\delta_p \Rightarrow \left(f_p/W\right)^{2n} = \boxed{\frac{1}{\left(1-\delta_p\right)^2} - 1 \triangleq G_p}$$

$$A(f_s) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(f_s/W\right)^{2n}}} = \delta_s \Rightarrow \left(f_s/W\right)^{2n} = \boxed{\frac{1}{(\delta_s)^2} \triangleq G_s}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(f_p/W\right)^{2n}}{\left(f_s/W\right)^{2n}} = \frac{G_p}{G_s} \Rightarrow \left(\frac{f_p}{f_s}\right)^{2n} = \frac{G_p}{G_s} \Rightarrow \boxed{n = \frac{1}{2}\frac{\log\left(\frac{G_p}{G_s}\right)}{\log\left(\frac{f_p}{f_s}\right)}}$$

pyöristetään n ylöspäin

Butterworth alipäästösuodattimen suunnittelu

2. Ratkaistaan normalisoitu suodattimen H(s) siirtofunktio (käytännössä taulukosta tai tietokoneohjelman avulla)
3. Ratkaistaan rajataajuus W
   1. Joko niin, että päästökaistan ehto toteutuu tarkkaan

   $$A(f_p) = 1-\delta_p \Rightarrow \left(f_p/W\right)^{2n} = G_p \Rightarrow W = \frac{f_p}{\left(G_p\right)^{\frac{1}{2n}}}$$

   2. Tai niin, että estokaistan ehto toteutuu tarkkaan

   $$A(f_s) = \delta_s \Rightarrow \left(f_s/W\right)^{2n} = G_s \Rightarrow W = \frac{f_s}{\left(G_s\right)^{\frac{1}{2n}}}$$

3. Suodattimen siirtofunktio saadaan kun sijoitetaan skaalaamalla s: $H\left(\frac{s}{2\pi W}\right)$

Esimerkki

- Päästökaista 0 – 50 Hz, vahvistus päästökaistalla > -3 dB

$$20\log_{10} A(f) \geq -3 \Rightarrow A(f) \geq 10^{-\frac{3}{20}} \approx 0.7079 = 1-\delta_p$$

$$G_p = \frac{1}{(1-\delta_p)^2} - 1 = \frac{1}{\left(10^{-\frac{3}{20}}\right)^2} - 1 = 10^{\frac{6}{20}} - 1 \approx 0.9953$$

- Estokaista 200 Hz, vahvistus estokaistalla -30 dB

$$20\log_{10} A(f) \leq -30 \Rightarrow A(f) = 10^{-\frac{30}{20}} \approx 0.0316 = \delta_s$$

$$G_s = \frac{1}{(\delta_s)^2} = \frac{1}{\left(10^{-\frac{30}{20}}\right)^2} = 10^{\frac{60}{20}} = 1000$$

Esimerkki

- Asteluku

$$n = \frac{1}{2}\frac{\log\left(\frac{G_p}{G_s}\right)}{\log\left(\frac{f_p}{f_s}\right)} \approx \frac{1}{2}\frac{\log\left(\frac{0.9953}{1000}\right)}{\log\left(\frac{50}{150}\right)} \approx 2.4931 \Rightarrow \text{n=3}$$

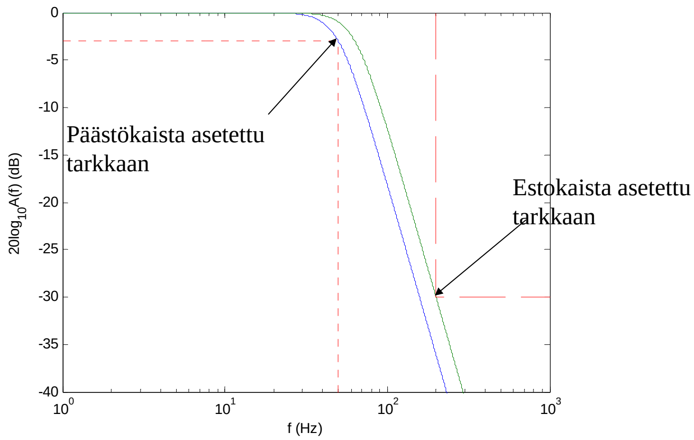
- Jos halutaan asettaa päästökaista tarkasti

$$W = \frac{f_p}{\left(G_p\right)^{\frac{1}{2n}}} = \frac{50}{(0.9953)^{\frac{1}{6}}} \approx 50.0393$$

- Jos halutaan asettaa estokaista tarkasti

$$W = \frac{f_s}{\left(G_s\right)^{\frac{1}{2n}}} = \frac{200}{(1000)^{\frac{1}{6}}} \approx 63.2456$$

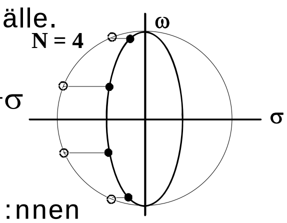
Esimerkki



Tšebyshevin suodatinperhe

- Tšebyshev Type I -suodattimen navat saadaan kun Butterworth-suodattimen navat liikkuvat vaakasuoraan ympyrään sisäiänkirjoitetun ellipsin kehälle.
- Amplitudifunktio on

$$\boxed{A(f)=\sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(f/W)}}}$$



jossa ε on ellipsin eksentrisyys, ja on n:nnen kertaluvun tyypin I Tšebyshevin polynomi.

$\boxed{T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)}$ $\boxed{T_0(x)=1}$ $\boxed{T_1(x)=x}$

- Amplitudifunktio sisältää ***aaltoilun (ripple)***, jonka maksimi- ja minimiamplitudin suhde päästökaistalla on $\boxed{r_A=\sqrt{1+\varepsilon^2}}$

Tšebyshevin suodatinperhe

- N kertaluvum Tšebyshevin tyypin I polynomi

$$T_n(x)=\begin{cases}\cos\left(N\cos^{-1}(x)\right) & |x|\le 1\\ \cosh\left(N\cosh^{-1}(x)\right) & |x|>1\end{cases}$$

$$T_n(0)=\begin{cases}\pm 1 & N \text{ parillinen}\\ 0 & N \text{ pariton}\end{cases},\quad T_n(1)=1$$

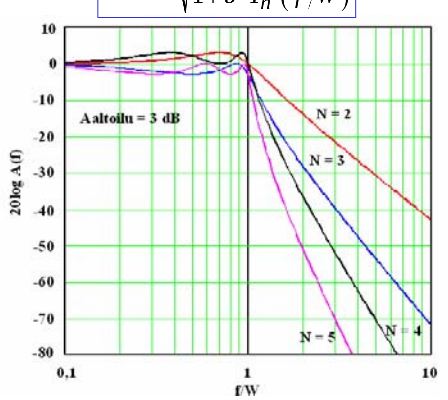
- Amplitudi funktio

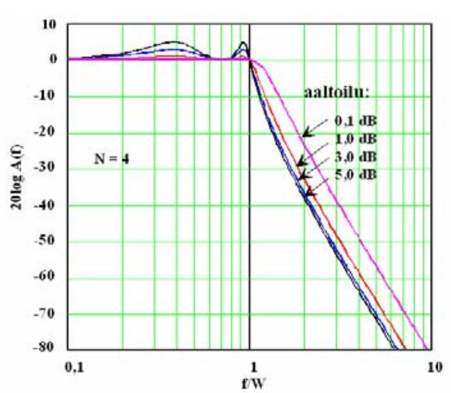
$$\boxed{\begin{aligned}A(0)&=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} & N \text{ parillinen}\\ 1 & N \text{ pariton}\end{cases}\\ A(W)&=\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\end{aligned}}$$

Tšebyshevin suodatinperhe

- Mitä suurempi aaltoilu sallitaan sitä kapeampi on ylimenokaista

$$\boxed{A(f)=\sqrt{\frac{1+\varepsilon^2T_n^2(0)}{1+\varepsilon^2T_n^2(f/W)}}}$$





Tšebyshevin alipäästösuodattimen suunnittelu

- Päästökaista $0 \le f \le f_p$
  - Vaadittu vahvistus $1-\delta_p \le A(f) \le 1+\delta_p$
- Estokaista $f \ge f_s$
  - Vaadittu vaimennus $A(f) \le \delta_s$

1. Aaltoilu päästökaistalla

$$A(W) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} = 1-\delta_p \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{(1-\delta_p)^2} - 1} = \sqrt{G_p}}$$

$$\boxed{G_p = \frac{1}{(1-\delta_p)^2} - 1}$$

Tšebyshevin alipäästösuodattimen suunnittelu

2. Asteluku

$$A(f_s) = \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(f_s/W)}} = \delta_s$$

$$\Rightarrow T_n(f_s/W) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{(\delta_s)^2} - 1\right)} = \sqrt{\frac{G_s}{G_p}}$$

$$\Rightarrow \boxed{N = \frac{\cosh^{-1}\left(\sqrt{\frac{G_s}{G_p}}\right)}{\cosh^{-1}(f_s/W)}}$$

Asteluku määrätään estokaistan perusteella

$$\boxed{G_s = \left(\frac{1}{(\delta_s)^2} - 1\right), G_p = \varepsilon^2 = \frac{1}{(1-\delta_p)^2} - 1}$$

Esimerkki

- Päästökaista 0 – 50 Hz, vahvistus päästökaistalla > -3 dB

$$20\log_{10} A(W) = -3 \Rightarrow A(W) = 10^{-\frac{3}{20}} = 1 - \delta_p$$

$$\Rightarrow G_p = \frac{1}{\left(1-\delta_p\right)^2} - 1 = 10^{\frac{3}{20}} - 1 \approx 0.4125$$

Aaltoilu

$$\varepsilon = \sqrt{G_p} \approx 0.6423$$

$$r_A = \sqrt{1+\varepsilon^2} \approx 1.1885 \Rightarrow 10\log_{10}\left(r_A\right) = 0.75 \text{ dB}$$

Esimerkki

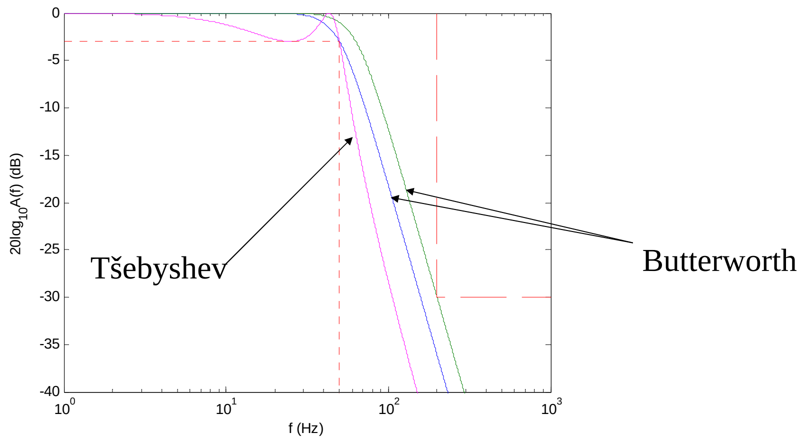
- Estokaista 200 Hz, vahvistus estokaistalla -30 dB

$$20\log_{10} A(f_s) = -30 \Rightarrow A(f_s) = 10^{-\frac{30}{20}} = \delta_s$$

$$G_s = \frac{1}{(\delta_s)^2} = \frac{1}{10^{-\frac{60}{20}}} = 1000$$

$$N = \frac{\cosh^{-1}\left(\sqrt{\frac{G_p}{G_s}}\right)}{\cos^{-1}\left(f_s/W\right)} \approx 2.2243$$

Esimerkki



28.11.2007 41

Transversaalisuodattimet

- Approksimoidaan suodatinta suoraan sen impulssivasteesta lähtien.
- Näytteistetään impulssivaste N:llä näytteellä

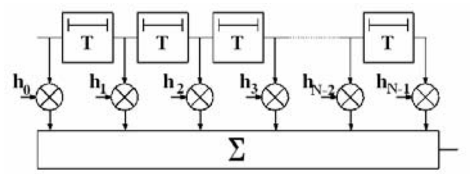
$$\boxed{h_S(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta\left(t - kT\right)}$$

- Taajuusvaste

$$\boxed{H_S(f) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)e^{-i2\pi fkT}}$$

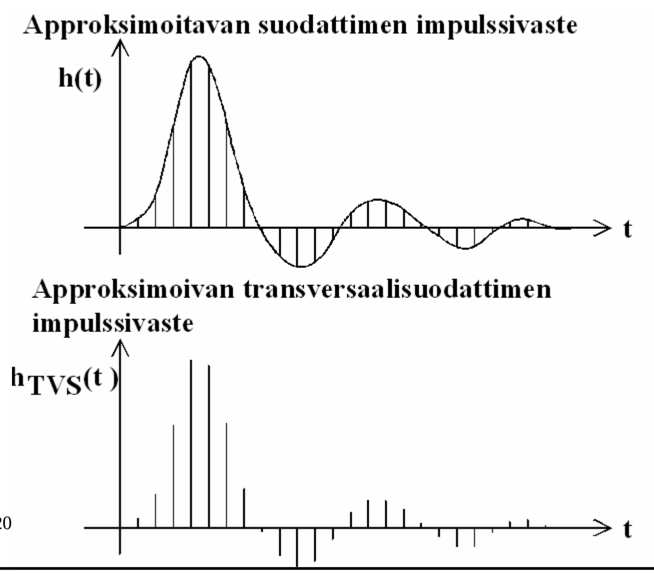
28.11.2007 42

Transversaalisuodattimet



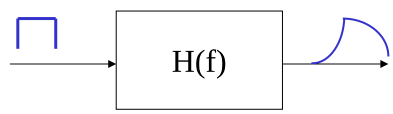
- Suodatinta vastaa viivästysalkioista koostuva viivelinja ja jokaisen viivealkion jälkeen on väliulosotto, jossa viivästetty tulosignaali kerrotaan kertoimella h_k.
- Väliulosottoja kutsutaan tapeiksi ja kertoimia kutsutaan tappikertoimiki.
- Kun tappikertoimet ovat riittävän tiheästi (näytteenottoteoreema) ja riittävän monta voidaan approksimoida mitä tahansa impulssivaste.
- Koska suuria tappimääriä on vaikea rakentaa, on käytettävä sopivia ikkunafunktioita katkaisun aiheuttaman spektri levenemisen lieventämiseksi.
- Käytännön toteutus esim. käyttäen digitaalista FIR-suodinta

Transversaalisuodattimet



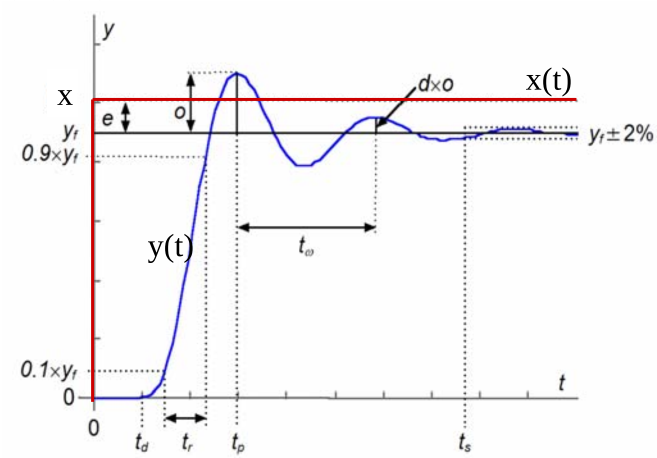
Pulssin suodattaminen

- Pulssi-muotoinen signaali sisältää korkeita taajuuksia, jotka suodattuvat alipäästösuodattimessa.
- Pulssin kulkua suodattimen läpi kuvaa nousuaika (rise time) ja ylitys (overshoot) ja asettumisaika (settiling time)



Askelvaste

- Askelvaste kertoo järjestelmän vasteen askelmaiselle herätteelle



Askelvaste

- Askelvasteen käyttäytymistä kuvataan seuraavilla suureilla
  - t_d = kuollut aika, viive
  - y_f = lopputila
  - x = askeleen korkeus
  - e = pysyvä poikkeama ($e = x - y_f$)
  - t_r = nousuaika (tavallisimmin määritetty ajaksi, joka kuluu, kun vaste nousee arvosta $0.1y_f$ arvoon $0.9y_f$).
  - t_ω = värähtelyn jaksonaika
  - t_s = asettumisaika (tavallisimmin määritetty ajaksi, jonka jälkeen vaste pysyy putken $y_f \pm 2\%$ tai $y_f \pm 5\%$ sisällä – vastaavat termit ovat kahden ja viiden prosentin asettumisajat)
  - t_p = vastehuipun aika (peak time)
  - o = ylitys (overshoot)
  - d = vaimennuskerroin

Pulssin suodattaminen

- Jotta pulssi perättäiset pulssit voitaisiin erottaa toisistaan, pitää suodattimen kaistanleveys olla selvästi suurempi kuin pulssin puolentehon kaistanleveys

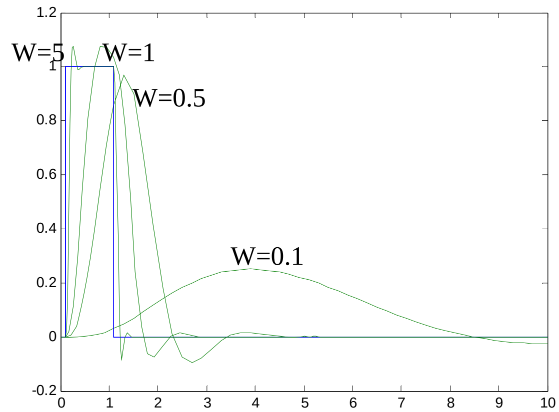
  $B >> 1/T$
- Jos pelkkä pulssin amplitudin havaitseminen riittää, selvitään pienemmällä kaistanleveydellä

  $B \geq 1/(2T)$
- Jos pulssille halutaan tietty nousuaika, vaaditaan

  $B \geq 1/(2t_r)$

3. Asteen Butterworth

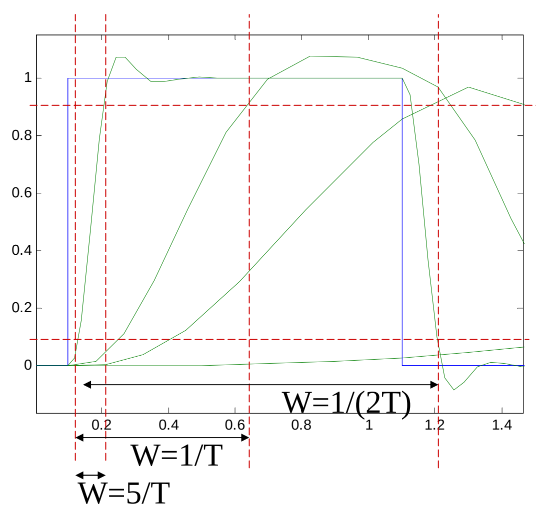
- Tarkastellaan T=1 pituisen pulssin suodatusta



28.11.2007 49

3. Asteen Butterworth

- Nousuaika



28.11.2007 50