

Luento 9

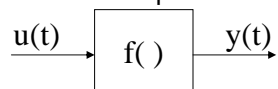
- Epälineaarisuus

29.11.2007

1

Epälineaarisuus

- Tarkastellaan passiivista epälineaarista komponenttia



- Taylor-sarjakehitelmä

$$y = f(x_0) + \frac{1}{2!} f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{3!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{4!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

- Epälineaarisuuden läpi kulkenut signaali

$$y(t) = f(u(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u^k(t)$$

- Kertolasku aikatasossa vastaa konvoluutiota taajuustasossa

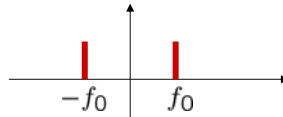
$$Y(f) = f(u(t)) = \alpha_0 \delta(f) + \alpha_1 U(f) + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k U^{*(k)}(f) \quad 2$$

Epälineaarisuus

- Tarkastellaan sini-muotoista herätettä
 $u(t) = 2 \cos(2\pi f_0 t)$

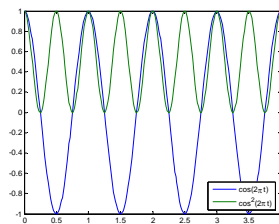
- Fourier-muunnos

$$U(f) = \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)$$

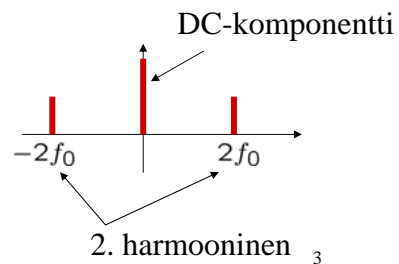


- Epälineaarisuus $y(t) = u^2(t)$

$$Y(f) = U * U(f) = \delta(f + 2f_0) + 2\delta(f) + \delta(f - 2f_0)$$



29.11.2007

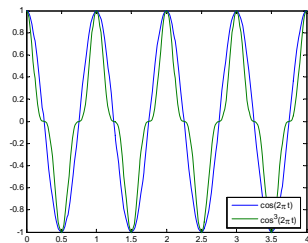


3

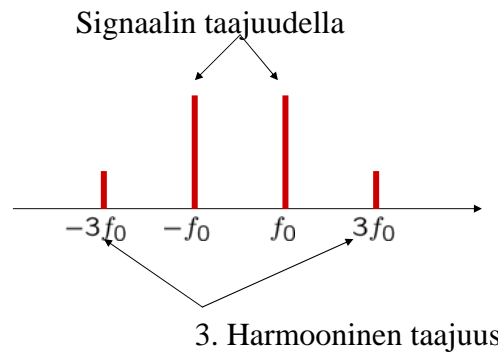
Epälineaarisuus

- Epälineaarisuus $y(t) = u^3(t)$

$$Y(f) = U *^{(2)} U(f) = \delta(f + 3f_0) + 3\delta(f + f_0) + 3\delta(f - f_0) + \delta(f - 3f_0)$$



29.11.2007



4

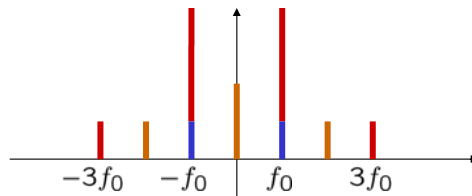
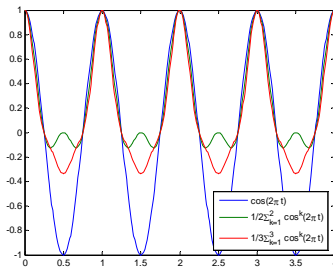
Epälineaarisuus

- Epälineaarisuudet synnyttävät harmonisia taajuuksia
- Approksimoidaan epälineaarisuutta Taylor-sarjan kolmella ensimmäisellä termillä:

$$y(t) \approx \alpha_0 + \alpha_1 u(t) + \alpha_2 u^2(t) + \alpha_3 u^3(t)$$

Parilliset potenssit
synnyttävät harmonisia, jotka
voidaan poistaa suodattamalla

Parittomat potenssit
aiheuttavat komponentteja
myös signaalin
taajuudelle



5

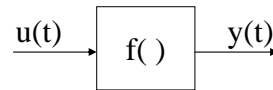
Särö

- Yleinen epälineaarisuus

$$f(x_0) + \frac{1}{2!} f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{3!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{4!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

- Kun tulosignaali on kosini
 $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$



- niin epälineaarisuuden lähtösignaali

$$y(t) = f(x(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x(t))^k$$

voidaan kirjoittaa tulosignaalin **harmonisten yliaaltojen** avulla

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \cos(2\pi k f_x t)$$

29.11.2007

6

Särö

- Epälineaarisuuden vaikutusta signaaliin voidaan tarkastella harmonisen **särökertoimien** (distortion) avulla

– n. asteen särökerroin:

$$d_n = \frac{u_n}{u_1} \quad n=2,3,4,\dots$$

$$|d_n| \cdot 100\% \quad \text{Särö \%}$$

– n asteen särövaimennus:

$$A_n = -20 \log_{10} |d_n|$$

- **Kokonaissärökerroin**

$$d_{tot} = \sqrt{d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + \dots}$$

29.11.2007

7

Särö

- Signaalin teho (Parsevalin teoreema)

$$\begin{aligned} P_y &= u_0^2 + \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{1}{2}u_3^2 + \frac{1}{2}u_4^2 + \frac{1}{2}u_5^2 + \dots \\ &= P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + \dots \end{aligned}$$

- Signaalin kokonaissärö voidaan määrittää kun tunnetaan lähtösignaalin kokonaisteho P_y , DC-komponentin teho P_0 sekä perustaajuuden teho P_1

$$d_{tot} = \sqrt{\frac{P_y - P_0 - P_1}{P_1}}$$

29.11.2007

8

Särö

- Epälineaarisuuden ominaiskäyrä

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

- Kosinin potenssikaavat

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} 2 \binom{2n}{k} \cos(2(n-k)x) + \binom{2n}{n} \right]$$

$$\cos^{2n-1} x = \frac{1}{2^{2n-2}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} \cos(2n-2k-1)x \right]$$

- Sovelletaan summakaavoja lähtösignaaliin

$$y(t) = a_0 + a_1A \cos(2\pi f_x t) + a_2A^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi \cdot 2f_x t) \right)$$

$$+ a_3A^3 \left(\frac{3}{4} \cos(2\pi f_x t) + \frac{1}{4} \cos(2\pi \cdot 3f_x t) \right)$$

$$+ a_4A^4 \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2\pi \cdot 2f_x t) + \frac{1}{8} \cos(2\pi \cdot 4f_x t) \right)$$

$$29.11.2007 + a_5A^5 \left(\frac{5}{8} \cos(2\pi f_x t) + \frac{5}{16} \cos(2\pi \cdot 3f_x t) + \frac{1}{16} \cos(2\pi \cdot 5f_x t) \right) + \dots$$

9

Särö

- Ryhmitellään termit uudelleen harmoonisten yliaaltojen mukaan

$$= \underbrace{\left(a_0 + \frac{1}{2} a_2 A^2 + \frac{3}{8} a_4 A^4 + \dots \right)}_{u_0} + \underbrace{\left(a_1 u + \frac{3}{4} a_3 u^3 + \frac{5}{8} a_5 A^5 + \dots \right)}_{u_1} \cos(2\pi f_x t)$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{2} a_2 A^2 + \frac{1}{2} a_4 A^4 + \dots \right)}_{u_2} \cos(2\pi \cdot 2f_x t)$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{4} a_3 A^3 + \frac{5}{16} a_5 A^5 + \dots \right)}_{u_3} \cos(2\pi \cdot 3f_x t)$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{8} a_4 A^4 + \dots \right)}_{u_4} \cos(2\pi \cdot 4f_x t) + \left(\frac{1}{16} a_5 A^5 + \dots \right) \cos(2\pi \cdot 5f_x t) + \dots$$

29.11.2007

10

Särö

- Särökertoimiksi saadaan

$$d_2 = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\left(\frac{1}{2}a_2A^2 + \frac{1}{2}a_4A^4 + \dots\right)}{\left(a_1A + \frac{3}{4}a_3A^3 + \frac{5}{8}a_5A^5 + \dots\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}a_2A + \frac{1}{2}a_4A^3 + \dots\right)}{\left(a_1 + \frac{3}{4}a_3A^2 + \frac{5}{8}a_5A^4 + \dots\right)}$$

$$d_3 = \frac{u_3}{u_1} = \frac{\left(\frac{1}{4}a_3A^3 + \frac{5}{16}a_5A^5 + \dots\right)}{\left(a_1A + \frac{3}{4}a_3A^3 + \frac{5}{8}a_5A^5 + \dots\right)} = \frac{\left(\frac{1}{4}a_3A^2 + \frac{5}{16}a_5A^4 + \dots\right)}{\left(a_1 + \frac{3}{4}a_3A^2 + \frac{5}{8}a_5A^4 + \dots\right)}$$

$$d_4 = \frac{u_4}{u_1} = \frac{\left(\frac{1}{8}a_4A^4 + \dots\right)}{\left(a_1A + \frac{3}{4}a_3A^3 + \frac{5}{8}a_5A^5 + \dots\right)} = \frac{\left(\frac{1}{8}a_4A^3 + \dots\right)}{\left(a_1 + \frac{3}{4}a_3A^2 + \frac{5}{8}a_5A^4 + \dots\right)}$$

$$d_5 = \frac{\left(\frac{1}{16}a_5A^5 + \dots\right)}{\left(a_1A + \frac{3}{4}a_3A^3 + \frac{5}{8}a_5A^5 + \dots\right)} = \frac{\left(\frac{1}{16}a_5A^4 + \dots\right)}{\left(a_1 + \frac{3}{4}a_3A^2 + \frac{5}{8}a_5A^4 + \dots\right)}$$

29.11.2007

11

Särö

- Jos $A \ll 1$ tai $a_n \ll a_1$, niin särökertoimeksi saadaan

$$d_n \approx \frac{a_n}{2^{n-1}a_1} A^{n-1}$$

ja särövaimennukseksi

$$A_n = -20 \log(d_n) \\ \approx 20 \log\left(\frac{2^{n-1}a_1}{a_n u^{n-1}}\right) = 20 \log\left(\frac{a_1}{a_n}\right) + (n-1) \cdot 3,01 - (n-1) \cdot 20 \log(u)$$

29.11.2007

12

Esimerkki

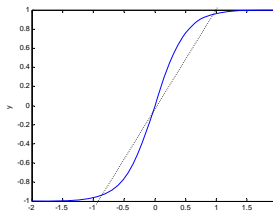
- Saturaatio (esim. vahvistimen yliohjaus)

$$y(t) = f(x(t))$$

$$f(x(t)) = \tanh(ax(t))$$

$$f(x) \approx ax - \frac{a^3}{3}x^3 + \frac{2a^5}{15}x^5 - \frac{17a^7}{315}x^7 + \dots$$

$$= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \quad |ax| \leq \frac{\pi}{2}$$



- Tarkastellaan tulosignaalia

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

- Särökertoimet kun $a=2$ ja $A=1$

$$d_{2n} = 0$$

$$d_n \approx \frac{a_n}{2^{n-1} a_1} A^{n-1}$$

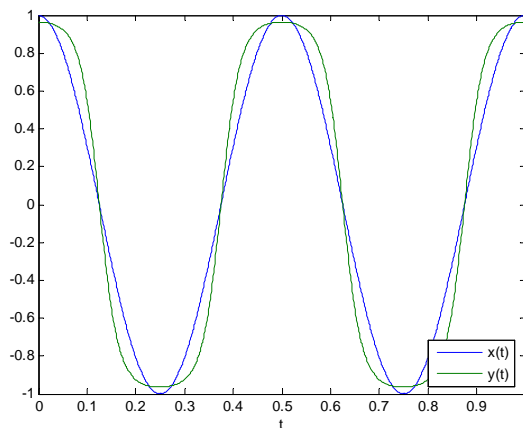
$$d_3 \approx -0.3333 \quad d_5 \approx 0.0133 \quad d_7 \approx -0.0540 \quad d_9 \approx 0.0219 \quad d_{11} \approx -0.0089$$

29.11.2007

-9.5 dB -37 dB -25 dB -33 dB -41 dB

13

Esimerkki



29.11.2007

14

Epälineaarisuus

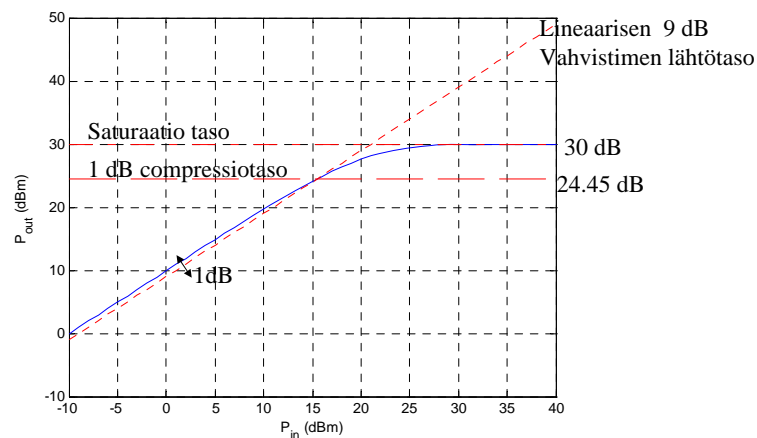
- Epälineaarinen komponentti aiheuttaa yleensä tehohukkaa kun tulosignaalin teho kasvaa suureksi.
- Epälineaarisuuden kuvaamiseen käytettyjä suureita
 - **Saturaatiotaso** (saturation level) on suurin järjestelmästä saatava perustaajuisen komponentin lähtötaso.
 - **1 dB:n kompressio taso** (1dB compression level) on se järjestelmän lähtötaso, joka on 1 dB alempi kuin lähtötaso ilman epälineaarisuutta.
 - **Kolmannen harmonisen leikkaustaso** on log-log-koordinaatistossa jatkettujen perustaajuisen amplitudin ja kolmannen harmonisen leikkauspiste.

29.11.2007

15

1 dB:n kompressio taso

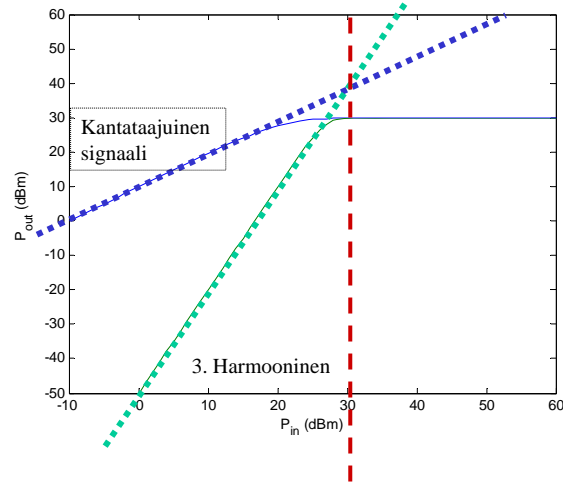
- Esimerkki 10 dB vahvistin



29.11.2007

16

Kolmannen harmonisen leikkaustaso



29.11.2007

17

Epälineaarisuus

- Traveling Wave Tube TWT tehovahvistin

Alkuperäinen signaali
 $x(t) = r(t) \cos(\omega_c t + \phi)$

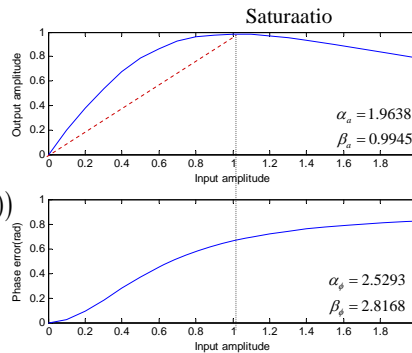
TWT-vahvistimen ulostulo

$y(t) = A(r(t)) \cos(\omega_c t + \phi + \Phi(r(t)))$

$$A(r) = \frac{\alpha_a r}{1 + \beta_a r^2}$$

$$\Phi(r) = \frac{\alpha_\phi r^2}{1 + \beta_\phi r^2}$$

Amplitudista riippuva vaiheensiirto



29.11.2007

18

Keskeismodulaatiosärö

- Keskeismodulaatiosäröä syntyy epälineaarissa järjestelmässä, kun tulosignaali on kahden tai useamman sinisignaalin summa.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

- Lähtösignaali on muotoa

$$y(t) = f(x(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x_1(t) + x_2(t))^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} a_k x_1^{k-n}(t) x_2^n(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_2^k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{n \neq k \\ n \neq 0}} \binom{k}{n} a_k x_1^{k-n}(t) x_2^n(t)$$

x_1 ja sen harmooniset yliaallot

x_2 ja sen harmooniset yliaallot

Sekoittuneet signaalit

29.11.2007

19

Keskeismodulaatiosärö

- Tarkastellaan epälineaarisuutta $y(t) = x^2(t)$

- Tulosignaali

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t) \quad \omega_1 > \omega_2$$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)$$

- Lähtösignaali

$$y(t) = A_1^2 \cos^2(\omega_1 t) + A_2^2 \cos^2(\omega_2 t) + 2A_1 A_2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)$$

$$\cos(\phi_1) \cos(\phi_2) = \frac{1}{2} (\cos(\phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2))$$

$$y(t) = \frac{1}{2} A_1^2 + \frac{1}{2} A_1^2 \cos(2\omega_1 t) + \frac{1}{2} A_2^2 + \frac{1}{2} A_2^2 \cos(2\omega_2 t) \\ + A_1 A_2 \cos((\omega_1 + \omega_2)t) + A_1 A_2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t)$$

29.11.2007

20

Keskeismodulaatiosärö

- Tarkastellaan tapausta, jossa $A_1=A_2=A$

$$y(t) = A^2 + \frac{1}{2}A^2 \cos(2\omega_1 t) + \frac{1}{2}A^2 \cos(2\omega_2 t) \\ + A^2 \cos((\omega_1 + \omega_2)t) + A^2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t)$$

- Verrataan samanasteiset harmoniset yliaaltojen ja keskeismodulaatitulososten amplitudeja

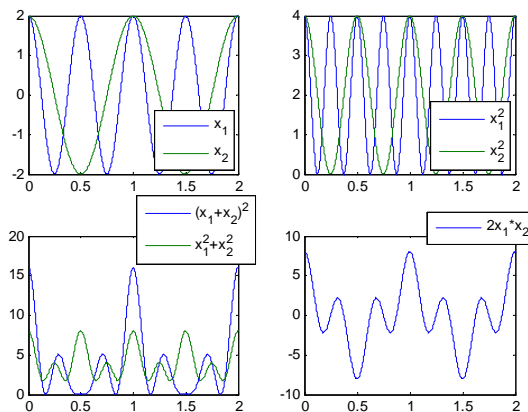
$$\frac{A^2}{\frac{1}{2}A^2} = 2$$

keskinäismodulaatio komponentit ovat vastaavia 2. kertaluvun harmoonisia taajuuksia suurempia

29.11.2007

21

Keskeismodulaatiosärö



29.11.2007

22

Keskeismodulaatiosärö

- Kahden kosini-signaalin kulkiessa n . asteen epälineaarisuuden läpi syntyy sekoitustaajuuksia

$$f_{x_{keskeis}} = |lf_{x_1} + mf_{x_2}| \quad |l|+|m|=n$$

f_{x_1} Tulosignaalin $x_1(t)$ taajuus

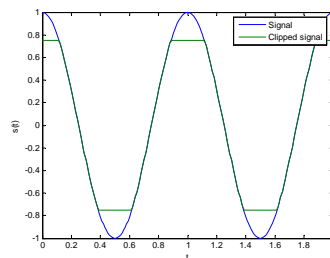
f_{x_2} Tulosignaalin $x_2(t)$ taajuus

29.11.2007

23

Sovelluksia

- Useimmiten säröllä tarkoitetaan tahatonta ja ei niin haluttua muutosta signaalissa, mutta erityisesti kitaristien keskuudessa säröllä tarkoitetaan efektiä, jolla muokataan alkuperäistä puhdasta signaalia lisäämällä siihen uusia taajuuskomponentteja. Säröefektiä tuottavaa laitetta kutsutaan usein äänensärkijäksi.
- Alkujaan säröefekti keksittiin 1950-luvulla kun kitaravahvistinta soitettiin niin kovaa, että vahvistin yliohjautui ja ääni säröytyi



29.11.2007

24

Matlab esimerkki

```

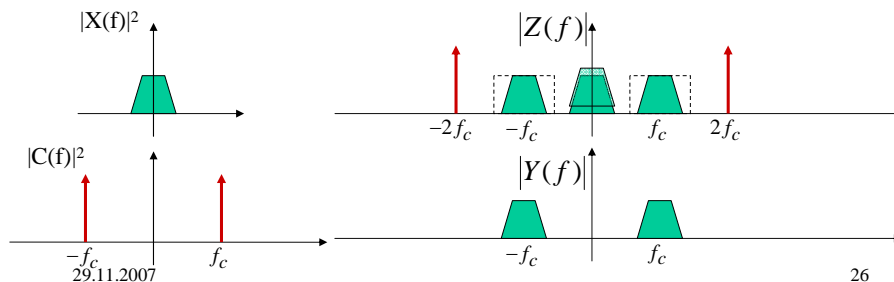
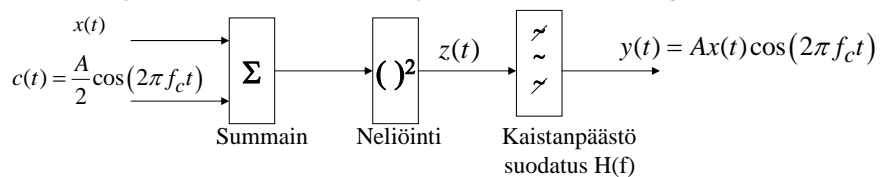
fs=44100; %Sampling frequency (Hz)
ts=1/fs; %Sampling time (sec)
f=50; %Signal 1 frequency (Hz)
T=5; %Signal length (sec)
A=0.5; %Signal amplitude
t=0:ts:T; %Time
y=A*cos(2*pi*f*t);
z=A*cos(2*pi*2*f*t);
disp('signal 1')
wavplay(y,fs)
pause
disp('clipped signal 1 (Distortion)')
yc=max(-0.75*A,min(0.75*A,y));
wavplay(yc,fs)
pause
disp('singal 2')
wavplay(z,fs)
pause
disp('clipped signal 2 (Distortion)')
zc=max(-0.75*A,min(0.75*A,z));
wavplay(z,fs)
pause
disp('singal 1 + signal 2')
wavplay(0.5*(y+z),fs)
pause
disp('two signals (Intermodulation distortion)')
yzc=max(-0.75*A,min(0.75*A,0.5*(y+z)));
wavplay(zc,fs)
pause
    
```

29.11.2007

25

Lineaarisen modulaattorin toteuttaminen

- Halutaan toteuttaa modulaattori piiri, joka saa syötteen kanta-aallon ja moduloitavan signaalin $x(t)$



29.11.2007

26