Luento 10

- Todennäköisyyslaskentaa
  - Otosavaruus, tapahtuma ja todennäköisyys
  - Ehdollinen todennäköisyys, tilastollinen riippumattomuus, Bayesin teoreema, kokonaistodennäköisyys
  - Odotusarvo, varianssi, momentti
- Stokastiset prosessit
  - Stationäärisyys ja ergodisuus

Otosavaruus, tapahtuma

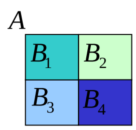
- Otosavaruus (sample space) Ω on kaikkien mahdollisten alkeistapahtumien (sample) ω joukko.
  - Esim. 1. Nopanheitto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - Esim. 2. Lähetyspuskurissa olevien pakettien lukumäärä $\Omega = \{0, 1, 2, ...\} = \mathbb{Z}$
  - Esim. 3. Puhelinkestoaika $\Omega = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$
- Tapahtumat $A, B, C, ...$ (events) ovat otosavaruuden mitallisia osajoukkoja $A, B, C, ... \subset \Omega$
  - Mahdoton tapahtuma esitetään tyhjällä joukolla $\emptyset$
  - Varma tapahtuma esitetään koko otosavaruudella Ω
    - Esim. 1. Nopan silmäluku on seitsemän $A = \emptyset$
    - Esim. 2. Puskurissa ei ole paketteja $A = \{0\}$
    - Esim. 3. Puhelu kestää korkeintaan 120 s $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 120\}$

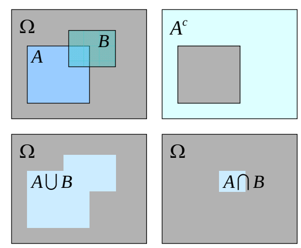
Otosavaruus, tapahtuma

- Yhdiste (union) $A \bigcup B$
- Leikkaus (intersection) $A \bigcap B$
- Komplementti (complement) $A^c = \{\omega \in \Omega | \omega \notin A\}$
- Tapahtumat ovat toisensa poissulkevia (disjoint), jos $A \bigcap B = \varnothing$
- Kokoelma $\{B_i\}$ tapahtumia muodostaa tapahtuman osituksen (partition), jos

$$B_i \bigcap B_j = \varnothing$$

$$\bigcup_j B_j = A$$





Todennäköisyys

- Tapahtuman todennäköisyys on sitä vastaavan joukon mitta $\Pr : \Im \mapsto [0,1]$, missä $\Im$ on kaikkien tapahtumien yhdiste.

  i) $\Pr\{\Omega\} = 1$

  ii) $\Pr\{\varnothing\} = 0$

  iii) $\Pr\{A \bigcup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{A \bigcap B\}$

  iv) $\Pr\{A^c\} = \Pr\{\Omega \setminus A\} = \Pr\{\Omega\} - \Pr\{A\} = 1 - \Pr\{A\}$

  iv) $\Pr\{\mathrm{A}\} = \sum_j \Pr\{B_j\}, \quad A = \bigcup_j B_j, B_i \bigcap B_j = \varnothing$

- Ehdollinen todennäköisyys

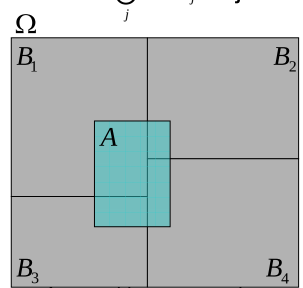
$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{A \bigcap B\}}{\Pr\{B\}} \Leftrightarrow \Pr\{A|B\}\Pr\{B\} = \Pr\{B|A\}\Pr\{A\}$$

Todennäköisyys

Kokonaistodennäköisyys

- Olkoon $\{B_i\}$ otosavaruuden Ω ositus
- Tällöin $\{B_i \cap A\}$ on tapahtuman A ositus: $A = \bigcup_j A \cap B_j$ ja

$$\Pr\{A\} = \sum_j \Pr\{A \cap B_j\}$$



- Ehdollisen todennäköisyyden lausekkeesta saadaan

$$\Pr\{A | B_j\} = \frac{\Pr\{A \cap B_j\}}{\Pr\{B_j\}}$$

$$\Leftrightarrow \Pr\{A \cap B_j\} = \Pr\{A | B_j\} \Pr\{B_j\}$$

- Kokonaistodennäköisyys voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$\Pr\{A\} = \sum_j \Pr\{A | B_j\} \Pr\{B_j\}$$

Bayesin kaava

- Olkoon $\{B_i\}$ otosavaruuden Ω ositus; tällöin

$$\left.\begin{aligned} \Pr\{A | B_i\} &= \frac{\Pr\{A \cap B_i\}}{\Pr\{B_i\}} \\ \Pr\{B_i | A\} &= \frac{\Pr\{A \cap B_i\}}{\Pr\{A\}} \\ \Pr\{A\} &= \sum_j \Pr\{A | B_j\} \Pr\{B_j\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Pr\{B_i | A\} = \frac{\Pr\{A | B_i\} \Pr\{B_i\}}{\sum_j \Pr\{A | B_j\} \Pr\{B_j\}}$$

- a priori todennäköisyys $\Pr\{A | B_i\}$
- a posteriori todennäköisyys $\Pr\{B_i | A\}$

Tilastollinen riippumattomuus

- **Määritelmä**: A ja B ovat riippumattomia (independent), jos $\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A\}\Pr\{B\}$
- Olkoon A ja B be riippumattomia tapahtumia, tällöin

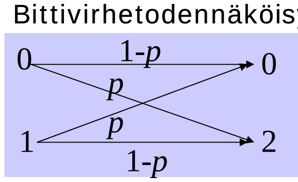
$$\Pr\{A|B\} = \frac{\Pr\{A \cap B\}}{\Pr\{B\}} = \frac{\Pr\{A\}\Pr\{B\}}{\Pr\{B\}} = \Pr\{A\}$$

$$\Pr\{B|A\} = \frac{\Pr\{A \cap B\}}{\Pr\{A\}} = \frac{\Pr\{A\}\Pr\{B\}}{\Pr\{A\}} = \Pr\{B\}$$

30.11.2006 7

Esimerkki. Binäärinen siirtokanava

- Valitaan lähetettävä bitti satunnaisesti
  $\Pr\{\text{lähetettävä bitti on } 1\} = 1 - \Pr\{\text{lähetettävä bitti on } 0\} = q$
- Bittivirhetodennäköisyys $\Pr\{\text{bittivirhe}\} = p$



- Oikein ja virheellisesti lähetettyjen bittien todennäköisyydet
  $\Pr\{\text{vastaanotetaan } 1 | \text{lähetty } 0\} = \Pr\{\text{bittivirhe}\} = p$
  $\Pr\{\text{vastaanotetaan } 1 | \text{lähetty } 1\} = 1 - \Pr\{\text{bittivirhe}\} = 1 - p$
- Kuinka hyvin voimme luottaa vastaanottimeen?
  $\Pr\{\text{lähetetty } 1 | \text{vastaanotettu } 1\} = ?$

30.11.2006 8

Esimerkki. Binäärinen siirtokanava

- Sovelletaan Bayesin kaavaa

$$\Pr\{\text{lähetetty 1}|\text{vastaanotettu 1}\}$$
$$= \frac{\Pr\{\text{vastaanotettu 1}|\text{lähetetty 1}\}\Pr\{\text{lähetetty 1}\}}{\Pr\{\text{vastaanotettu 1}|\text{lähetetty 1}\}\Pr\{\text{lähetetty 1}\}+\Pr\{\text{vastaanotettu 1}|\text{lähetetty 0}\}\Pr\{\text{lähetetty 0}\}}$$
$$= \frac{(1-p)q}{(1-p)q+p(1-q)}$$

- Jos molemmat bitit yhtätodennäköisiä

$$\Pr\{\text{lähetettävä bitti on 1}\} = 1-\Pr\{\text{lähetettävä bitti on 0}\} = q = 0.5$$
$$\Pr\{\text{lähetetty 1}|\text{vastaanotettu 1}\} = \Pr\{\text{vastaanotettu1}|\text{lähetetty 1}\} = 1-p$$

- Jos bitti 0 on kaksikertaa niin todennäköinen kuin 1

$$\Pr\{\text{lähetettävä bitti on 1}\} = q = 1/3$$
$$\Pr\{\text{lähetetty 1}|\text{vastaanotettu 1}\} = \frac{1-p}{1+p}$$

Satunaismuttujat

- Diskreetti satunnaismuuttuja X voi saada vain arvoja jotka kuuluvat numeroituvaan
  - Esim. $X \in \{0,1,2,...,\}$
- Jatkuva satunnaismuuttuja X voi saada saada arvoja ei numeroituvasta joukosta.
  - Esim. $X \in \{x|0<x<1\}$
- Kertymäfunktio

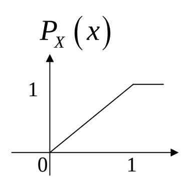
$$\boxed{P_X(x) = \Pr\{X \le x\}}$$

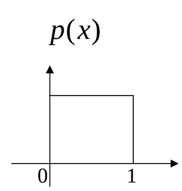
- Tiheysfunktio (jakauma)

$$\boxed{p(x) = \frac{d}{dx}P_X(x)}$$

- Todennäköisyys

$$\boxed{\Pr(x_0 \le X \le x_1) = \int_{x_0}^{x_1} p(x)dx}$$

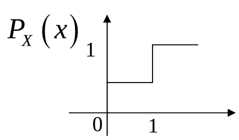


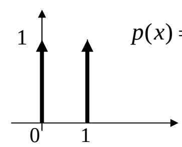


Pistejakauma

- ***Pistejakauma*** on tapa esittää diskreetti jakauma

$$p(x) = \sum_k \Pr\{X = x_k\}\,\delta(x - x_k)$$





$$p(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-1)$$

  - Esim. Nopan heiton pistejakauma

$$p(x) = \sum_{k=1}^{6} \Pr\{X = x\}\,\delta(x-k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}\delta(x-k)$$

Tunnuslukuja

- Odotusarvo (expected value)
  - Jatkuvalle jakaumalle

$$\mu_X = \mathrm{E}\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\,dx$$

  - Pistejakaumalle (diskreeteille satunnaisluvuille)

$$\mu_X = \mathrm{E}\{X\} = \sum_{x\in\Omega} x \Pr\{X = x\}$$

- Varianssi (variance)
  - Jatkuvalle jakaumalle

$$\sigma_X^{\;2} = \mathrm{var}\{X\} = \mathrm{E}\left\{\left|X - E\{X\}\right|^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left|x - E\{X\}\right|^2 p(x)\,dx$$

  - Pistejakaumalle

$$\sigma_X^{\;2} = \mathrm{var}\{X\} = \mathrm{E}\left\{\left|X - E\{X\}\right|^2\right\} = \sum_{x\in\Omega}\left|X - E\{X\}\right|^2 \Pr\{X = x\}$$

Tunnuslukuja

- Keskihajonta (standard deviation)

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{\operatorname{var}\{X\}}}$$

- Kovarianssi (covariance)

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) = \mathrm{E}\{(X - E\{X\})(Y - E\{Y\})\}}$$

- Korrelaatiokerroin (correlation coeffisient)

$$\boxed{\rho_{xy} = \frac{\mathrm{E}\{(X - \mathrm{E}\{X\})(Y - \mathrm{E}\{Y\})\}}{\sqrt{\mathrm{E}\{(X - \mathrm{E}\{X\})^2\}\mathrm{E}\{(Y - \mathrm{E}\{Y\})^2\}}}}$$

- Momentti (moment)

$$\boxed{m_X^k = \mathrm{E}\{X^k\}}$$

Bernolli-jakauma

- Kuvaa yksittäistä satunnaiskoetta, jonka tuloksena on onnistumenen 1 todennäköisyydellä p tai epäonnistuminen todennäköisyydellä $1\text{-}p$.
- Pistetodennäköisyydet

$$\Pr\{X = 1\} = p, \quad \Pr\{X = 0\} = 1 - p$$

- Odotusarvo

$$\mathrm{E}\{X\} = 1\Pr\{X = 1\} + 0\Pr\{X = 0\} = p$$

$$\operatorname{var}\{X\} = \mathrm{E}\{(X - \mathrm{E}\{X\})^2\}$$

$$= \mathrm{E}\{X^2\} - (\mathrm{E}\{X\})^2 = p(1 - p)$$

Binomijakauma

- Onnistumisien lukumäärä n:ssä perättäisessä toisistaan riippumattomissa kokeessa.

  $X \in \{0,1,2,\ldots,n\}$

- Pistetodennäköisyydet

  $$\Pr\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Kertymäfunktio

  $$\Pr\{X \le k\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Odotusarvo

  $$\mathrm{E}\{\mathrm{X}\} = \sum_{k=0}^{n} k \Pr\{X = k\} = np$$

- Varianssi

  $$\mathrm{var}\{\mathrm{X}\} = \frac{p}{(1-p)^2}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$ Binomitekijä (binomial coefficient)

$n! = 1 \bullet 2 \bullet \ldots \bullet n$ Kertoma (factorial)

Poisson-jakauma

- Tarkastellaan Binomijakaumaa kun n kasvaa rajatta
  - Olkoon

    $$p = \frac{a}{n}, \quad 0 < a < n$$

  - Tällöin

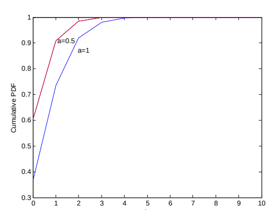
    $$\Pr\{X = k\} = 1\frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k}$$

    $$= \frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}{n^k}\frac{a^k}{k!}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n \left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k} \to \underline{\frac{a^k}{k!}e^{-a}}, \quad n \to \infty$$

  - Koska

    $$\frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}{n^k} = \frac{n^k + n^{k-1}(\ldots) + \ldots}{n^k} \to 1$$

    $$\left(1-\frac{a}{n}\right)^n \to e^{-a}$$



Poisson jakauma

- Oletusarvo

$$E\{X\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \Pr\{X = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a^k}{k!} e^{-a}$$

$$= ae^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a^{k-1}}{(k-1)! \cdot k} = ae^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = ae^{-a} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}}_{e^a} = a$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$ Maclaurin sarja

- 2. momentti

$$E\{X^2\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{a^k}{k!} e^{-a} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{a^k}{k!} e^{-a} = ae^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{a^{k-1}}{(k-1)!}$$

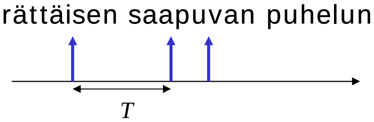
$$= ae^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{a^k}{k!} = ae^{-a} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{a^k}{k!} e^{-a}}_{ae^a} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}}_{e^a} \right) = a(a+1)$$

- Varianssi

$$E\left\{(X - E\{X\})^2\right\} = E\{X^2\} - E\{X\}^2 = a(a+1) - a^2 = a$$

Poisson jakauma

- Esimerkki.
  - Uusia puheluita saapuu puhelinvaihteeseen Poisson jakautuneesti intensiteetillä λ puhelua minuutissa.
  - Ratkaise kahden perättäisen saapuvan puhelun aikaeron jakauma.



  - Ajassa t saapuu k puhelua todennäköisyydellä

$$\Pr\{X = k; t\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

  - Saapumisaikojen ero on pienempi kuin t, jos ajassa t saapuu vähintään yksi pyhelu

$$\Pr\{T \le t\} = 1 - \Pr\{X = 0; t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

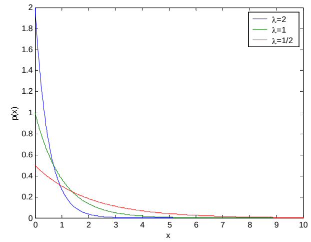
  - Jakauma saadaan derivoimalla:

$$p(t) = \frac{d}{dt} \Pr\{T \le t\} = \lambda e^{-\lambda t}$$

Eksponenttijakauma

- Jakauma

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$



- Kertymäfunktio

$$\Pr\left(X\le x\right)=1-e^{-\lambda x},\quad x\ge 0$$

- Muistittomuus

$$\Pr\left(X>x+y\,|\,X>x\right)=\frac{\Pr\{X>x+y, X>x\}}{\Pr\{X>x\}}$$

$$=\frac{\Pr\{X>x+y\}}{\Pr\{X>x\}}=\frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}}=e^{-\lambda y}=\Pr\{X>y\}$$

Tasajakauma

- Jakauma

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{muutoin}\end{cases},\quad a<b$$

- Odotusarvo

$$\mathrm{E}\{\mathrm{X}\}=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{1}{2}\frac{(b-a)(b+a)}{b-a}=\frac{1}{2}(b+a)$$

$$\mathrm{E}\{\mathrm{X}^2\}=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx=\frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a}=\frac{1}{3}\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{b-a}=\frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)$$

$$\mathrm{var}\{\mathrm{X}\}=(b-a)\left(\frac{4}{12}(b^2+ab+a^2)-\frac{3}{12}(b^2+2ab+b^2)\right)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

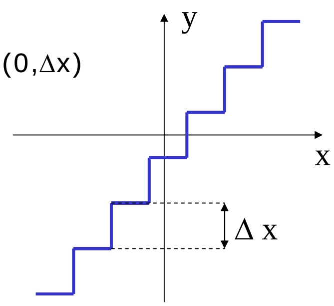
Kvantisointivirhe

- Tarkastellaan signaalin A/D-muunnosta käyttäen tasavälistä kvantisointia
- Kun kvantisointitasojen lukumäärä on riittävän suuri, voidaan katsoa että signaalin on Δx suuruisella välillä tasan jakautunut riippumatta siitä, mikä on koko signaalin todennäköisyysjakauma.
- Kvantisointivirhe

  ε=y-x on tasajakautunut välille (0,Δx)

  E{ε}= Δx/2

  var{ε}= $\Delta x^2/12$



Terminen kohina metalli johtimissa

- Johtuu varautuneiden partikkelien (elektronien) satunnaisesta liikkeestä johtavassa aineessa.
- Olkoon lämpötila T Kelviniä ja johtimen resistanssi R Ohmia, tällöin elektronien liike saa aikaan Normaalijakautuneen jännitteen jonka u keskiarvo on 0V ja varianssi on

$$E\{u^2\} = \frac{2(\pi k T)^2}{3h} R \approx 1.9 \cdot 10^{-12} T^2 R$$

neliövolttia.

T lämpötila
k Bolzmannin vakio
h Plankin vakio

Normaalijakauma $N(\mu,\sigma)$

- Jakauma

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Odotusarvo

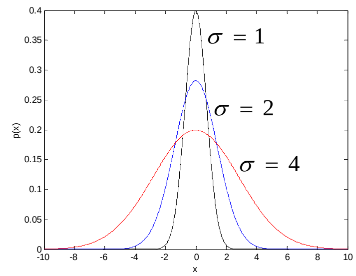
$$\mathrm{E}\{\mathrm{X}\}=\mu$$

- Varianssi

$$\mathrm{var}\{\mathrm{X}\}=\sigma^2$$

- Kertymäfunktio

$$\Pr\{X\le x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$



Satunnaislukujen summa

- Tarkastellaan kahden satunnaisluvun summaa

$$Y=X_1+X_2$$

joiden kertymäfunktiot ja todennäköisyystiheydet ovat

$$\Pr\{X_1\le x\}=P_{x1}(x) \qquad \Pr\{X_2\le x\}=P_{x2}(x)$$

$$\frac{d}{dx}P_{x1}(x)=p_{x1}(x) \qquad \frac{d}{dx}P_{x2}(x)=p_{x2}(x)$$

  - Ratkaistaan ensin ehdollinen todennäköisyys

$$\Pr\{Y\le y | X_2=x_2\}=\Pr\{X_1\le y-x_2\}=F_1(y-x_2)$$

  - Kokonaistodennäköisyys saadaan integroimalla X_2:n jakauman yli

$$\Pr\{Y\le y\}=\int_{-\infty}^{\infty}P_{x1}(y-x_2)p_{x2}(x_2)dx_2$$

  - Tiheysfunktio saadaan tästä derivoimalla

$$P_y(y)=\frac{d}{dy}\Pr\{Y\le y\}=\underline{\int_{-\infty}^{\infty}p_{x1}(y-x_2)p_{x2}(x_2)dx_2} \quad \text{Konvoluutio integraali}$$

Keskeinen raja-arvo lause

(Central limit theorem)

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_N$ joukko riippumattomia satunnaissuureita. Satunnaissuure X_i:n todennäköisyystiheys $p_i(x)$ voi olla mielivaltainen kunhan sen odotusarvo μ_i ja varianssi σ_i^2 ovat rajoitettuja. Summa

$$Z_N = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)$$

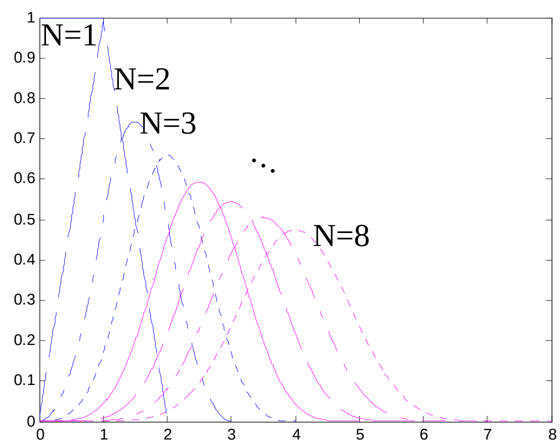
lähestyy N(0,1) jakaumaa kun $N \to \infty$.

$$\lim_{N\to\infty} \Pr\{Z_N < x\} = \Phi(x)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Keskeinen raja-arvo lause

- Tarkastellaan N tasajakautuneen U(0,1) muuttujan summan todennäköisyystiheyttä



Normalisoitu Normaalijakauma

- Taulukoista löytyy $N(0,1)$

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

- Yleisestä tapauksesta päästään tähän muuttuhjan vaihdolla

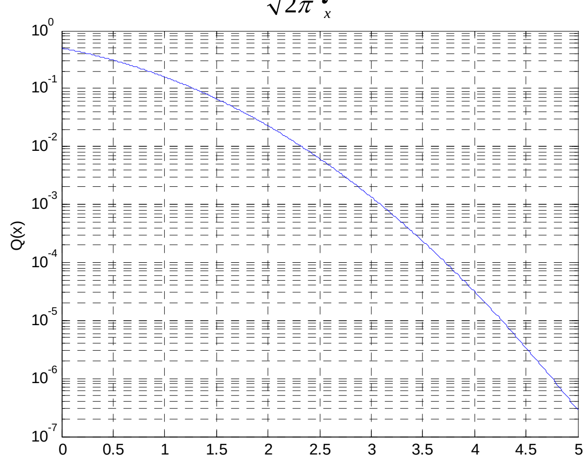
$$y = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

- Usein tarvitaan häntätodennäköisyyttä (tail probability)

$$Q(y) = \Pr\{Y > y\} = 1 - \Pr\{Y \le y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

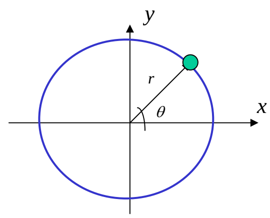
Normalisoitu Normaalijakauma

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$



Kompleksinen normaalijakauma

- Tarkasellaan satunnaissuuretta
  $z = x + iy = re^{i\phi} \qquad x, y \sim N\left(0, \sigma^2\right)$
  - Satunnaissuure $u = zz^* = x^2 + y^2$ on exponenttijakautunut
    $$p(u) = \frac{1}{2\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}u\right), \quad u \geq 0$$
  - Satunnaissuure $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ on Rayleigh-jakautunut
    $$p(r) = \frac{r}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}r^2\right), \quad r \geq 0$$
  - Satunnaissuure ϕ on tasajakautunut
    $$p(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

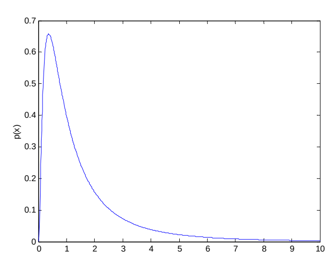


Log-normaalijakauma

- Olkoon X normaalijakautunut satunnaismuuttuja, tällöin $Y = e^{\alpha X}, \alpha > 0$ on log-normaalijakautunut. Eli, Y:n logaritmi on normaali jakautunut.

$$\Pr\left\{e^{\alpha X} < y\right\} = \Pr\left\{X < \frac{1}{\alpha}\ln y\right\} = P_X\left(\frac{1}{\alpha}\ln y\right)$$

$$p_Y(y) = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{y}p_X\left(\frac{1}{\alpha}\ln y\right), \quad y > 0$$



Pareto-jakauma

- Jakauma

$$p(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}}, \quad b > 0, x > b$$

a muoto parametri (shape parameter)
b skaalaus parametri (scale parameter)

- Kertymä

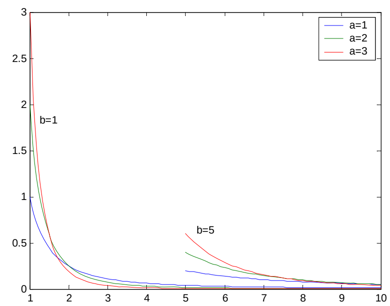
$$\Pr\{X < x\} = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a, \quad x \geq b$$

- Odotusarvo

$$\mathrm{E}\{X\} = \begin{cases} \frac{ab}{a-1} & a > 1 \\ \infty & a \leq 1 \end{cases}$$

- Varianssi

$$\mathrm{var}\{X\} = \begin{cases} \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)} & a > 2 \\ \infty & a \leq 2 \end{cases}$$



Pareto-jakauma on ns. paksuhäntäinen (heavy tailed) jakauma.

Yhteisjakauma

- Olkoon X_1 ja X_2 satunnaismuuttujia.
- Todennäköisyyttä tapahtumalle $\{X_1 < x_1\} \cap \{X_2 < x_2\}$ merkitään $\Pr\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\}$
- Kertymäfunktio

$$P(x_1, x_2) = \Pr\{X_1 < x_1, X_2 < x_2\}$$

- Yhteisjakauma

$$p(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} P(x_1, x_2)$$

- Todennäköisyys

$$\Pr\{x_{10} < X_1 < x_{11}, x_{20} < X_2 < x_{21}\} = \int_{x_{10}}^{x_{11}} \int_{x_{20}}^{x_{21}} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

- Yleistäminen N:lle muuttujalle on triviaalia.

Ehdollinen todennäköisyys

- Ehdollinen todennäköisyys

$$\Pr\{x_{10} < X_1 < x_{11} | x_{20} < X_2 < x_{21}\} = \frac{\Pr\{x_{10} < X_1 < x_{11}, x_{20} < X_2 < x_{21}\}}{\Pr\{x_{20} < X_2 < x_{21}\}}$$

$$= \frac{\int_{x_{10}}^{x_{11}} \int_{x_{20}}^{x_{21}} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2}{\int_{x_{20}}^{x_{21}} p(x_2) dx_2}$$

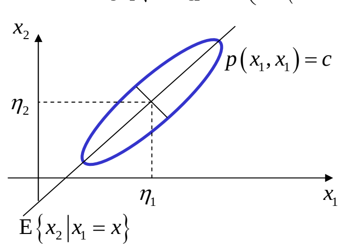
- Ehdollinen jakauma

$$p(x_1 | x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \Pr\{X_1 < x_1 | X_2 < x_2\} = \frac{\int_{-\infty}^{x_1} p(x_1, x_2) dx_1}{\int_{-\infty}^{x_2} p(x_2) dx_2}$$

Yhteisjakauma

- Esimerkki: 2-dimensioinen Gaussinen jakauma

$$p(x_1, x_1) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)}\left(\frac{(x_1-\eta_1)^2}{\sigma_1} - \frac{2\rho_{12}(x_1-\eta_1)(x_2-\eta_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\eta_2)^2}{\sigma_2}\right)\right)$$



$$\mathrm{E}\{x_1^2\} = \eta_1, \quad \mathrm{E}\{x_2^2\} = \eta_2$$

$$\mathrm{E}\{(x_1-\eta_1)^2\} = \sigma_1^2, \quad \mathrm{E}\{(x_1-\eta_1)^2\} = \sigma_1^2$$

$$\mathrm{E}\{(x_1-\eta_1)(x_2-\eta_2)\} = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

- Jos $\rho_{12} = 0$, niin satunnaismuuttujat ovat riippumattomia.
- Jos $\rho_{12} = 1$, niin $x_2 = ax_2 + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$

Stokastiset prosessit

- Stokastinen prosessi on joukko satunnaismuuttujia $\{X(t,\omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$, jota indeksoi reaaliarvoinen parametri t (yleensä aika)
- Indeksijoukkoa $t \in T$ kutsutaan prosessin *parametriavaruudeksi*.
- Jokainen yksittäinen satunnaismuuttuja on kuvaus otosavaruudesta reaali- (tai kompleksi-) tasoon. Alkeistapausta ω vastaavaa parametrisoitua joukkoa kutsutaan satunnaisluvun $X(t)$ *realisaatioksi/trajektoriksi/poluksi.*
- Usein käytetään laiskaa notatiota ja samaistetaan stokastinen prosessi sen realisaatioon.

Stokastiset prosessit

- *Tila-avaruus* (state-space) on $X(t)$:n mahdollisten lukujen joukko. (vrt. satunnaisluvun otosavaruus)
  - Tila-avaruus on *diskreetti*, jos tilojen lukumäärä on rajallinen tai numeroituva

    Diskreettitilainen/Diskreettiaikainen prosessi/sekvenssi/ketju(chain)

    $\{X(t_k)\}, \quad t \in \{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$
  - Tila-avaruus on *jatkuva,* jos aikaindeksi kuuluu ei-numeroituvaan jatkuvaan joukkoon

    Jatkuvatilainen/Jatkuva-aikainen

    prosessi $X(t), \quad t \in (0, \infty]$

Stokastiset prosessit

- Tilastolliset ominaisuudet ovat ajan funktioita
  - Kertymäfunktio

$$P_X(x;t) = \Pr\{X(t) \le x\}$$

  - Tiheysfunktio

$$p_X(x;t) = \frac{d}{dx} P_X(x;t)$$

Stokastiset prosessit

- Odotusarvo

$$\eta_x(t) = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x,t)dx$$

- Autokorrelaatio

$$\phi_{xx}(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X^*(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2p(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$$

- Ristikorrelaatio

$$\phi_{xy}(t_1,t_2) = E\{X(t_1)Y^*(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp(x,y;t_1,t_2)dxdy$$

- Autokovarianssi

$$C_{xx}(t_1,t_2) = E\left\{\left(X(t_1) - E\{X(t_1)\}\right)\left(X(t_2) - E\{X(t_2)\}\right)^*\right\} = \phi_{xx}(t_1,t_2) - \eta_x(t_1)\eta_x(t_2)$$

- Ristikovarianssi

$$C_{xy}(t_1,t_2) = E\left\{\left(X(t_1) - E\{X(t_1)\}\right)\left(Y(t_2) - E\{Y(t_2)\}\right)^*\right\} = \phi_{xy}(t_1,t_2) - \eta_x(t_1)\eta_y(t_2)$$

Stationaariset prosessit

- Kaksi stokastista eivät korreloi, jos

$$\phi_{xy}(t_1,t_2) = E\left\{X(t_1)Y^*(t_2)\right\} = E\left\{X(t_1)\right\}E\left\{Y^*(t_2)\right\} = \eta_x(t)\eta_y(t)$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}_{xy}(t_1,t_2) = 0}$$

- Kaksi stokasista prosessia ovat *ortogonaalisia,* jos

$$\boxed{\phi_{xy}(t_1,t_2) = 0}$$

- Jos stokastisten prosessien välillä on lineaarinen riippuvuussuhde $y(t) = ax(t) + b$

$$\phi_{xy}(t_1,t_2) = a\phi_{xx}(t_1,t_2) + b\eta_x(t_1)$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}_{xy}(t_1,t_2)}{\sqrt{\phi_{xx}(t_1,t_2)\phi_{yy}(t_1,t_2)}} = 1$$

Korrelaatiokerroin

Poisson prosessi

- Tarkastellaan saapumis prosessia, jossa asiakkaita saapuu intensiteetillä λ siten, että aikavälissä $(0,t)$ saapuu k asiakasta todennäköisyydellä

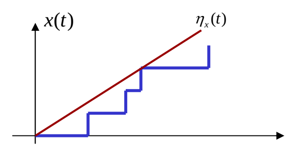
$$\Pr\left\{X(t) = k\right\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

- Saapuneiden asiakkaiden kokonaismäärä $X(t)$ on stokastinen prosessi $X(0) = 0$
  - 1. ja 2. momentit

$$\eta_x(t) = E\left\{X(t)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} = \lambda t$$

$$E\left\{X^2(t)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} = \lambda^2 t^2 + \lambda t(a+1)$$

$$E\left\{X(t_1) - X(t_2)\right\} = \lambda(t_2 - t_1)$$



Poisson prosessi

- Autokorrelaatio

$$\phi_{xx}(t_1,t_2)=E\left\{X(t_1)X(t_2)\right\}=E\left\{\left(X(t_1)-X(0)\right)\left(\left(X(t_1)-X(0)\right)+\left(X(t_2)-X(t_1)\right)\right)\right\},\quad t_2\geq t_1$$

$$=E\left\{\left(X(t_1)-X(0)\right)^2\right\}+E\left\{\left(X(t_1)-X(0)\right)\right\}E\left\{X(t_2)-X(t_1)\right\}$$

$$=\lambda^2 t_1^2+\lambda\, t_1+\lambda\, t_1\lambda\left(t_2-t_1\right)$$

$$=\lambda\, t_1+\lambda^2 t_1 t_2$$

Muuttuja $X(t_2)-X(t_1)$ on riippumaton $X(t_1)-X(t_0)$:sta.

N-dimensioiset stokastiset prosessit

- Yhteisjakauma ja kertymäfunktio

$$p(\mathbf{x};\mathbf{t})=p\left(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n\right)$$

$$P_X(\mathbf{x};\mathbf{t})=\Pr\left\{X\left(t_1\right)\leq x_1,X\left(t_2\right)\leq x_2,\ldots,X\left(t_n\right)\leq x_n\right\}$$

$$\mathbf{X}=\left[X\left(t_1\right)\quad X\left(t_2\right)\quad\ldots\quad X\left(t_n\right)\right]^T,\quad \mathbf{x}=\left[x_1\quad x_2\quad\ldots\quad x_n\right]^T$$

$$\mathbf{t}=\left[t_1\quad t_2\quad\ldots\quad t_n\right]^T$$

- Jos $X\left(t_k\right)$:t riippumattomia, niin

$$p(\mathbf{x};\mathbf{t})=\prod_{k=1}^{n}p\left(x_k,t_k\right)\qquad P_X(\mathbf{x};\mathbf{t})=\prod_{k=1}^{n}\Pr\left\{X\left(t_1\right)\leq x_1\right\}$$

- Jos satunnaissekvenssi on stationaarinen

$$P_X(\mathbf{x};\mathrm{t}+\tau)=P_X(\mathbf{x};\mathrm{t})$$

Stationaariset prosessit

- *Stationaarisuus* (wide sense stationarity): Tilastolliset ominaisuudet ajasta riippumattomia.

$$m_x = E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx$$

$$\phi_{xx}(t_1,t_2) = \boxed{\phi_{xx}(\tau) = E\{x(t)x^*(t-\tau)\}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\, p(x_1,x_2;\tau)\,dx_1 dx_2, \quad t_2 - t_1 = \tau$$

- *Ergodisuus*: Tilastolliset ominaisuudet voidaan määrttää yksittäisestä realisaatiosta. => <u>Aikakeskiarvo vastaa oletusarvoa</u>.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt = E\{x(t)\} = m_x$$

- *Riippumattomuus* (independency):

$$\mathrm{E}\left\{\left(X(t_1) - \mathrm{E}\{X(t_1)\}\right)\left(X(t_2) - \mathrm{E}\{X(t_2)\}\right)^*\right\} = \begin{cases} \mathrm{var}\{X(t_1)\}, & t_1 = t_2 \\ 0, & t_1 \neq t_2 \end{cases}$$

  - Stokastisen prosessin tiheysfunktio saadaan eri ajan hetkille määriteltyjen todennäköisyystiheyksien tulona.

Valkoinen kohina

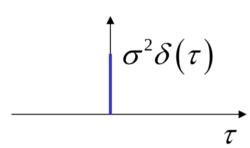
- Tarkastellaan stationaarista normaalijakautunutta $N(0,\sigma)$ prosessia. Tällöin

$$p(x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2(t)}{2\sigma^2}}$$

$$\phi_{xx}(t_1,t_2) = E\{x(t_1)x^*(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)x(t_2)\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2(t_1)+x^2(t_2)}{2\sigma^2}} dx(t_1)dx(t_2),\ \tau = t_2 - t_1$$

$$= \phi_{xx}(\tau) = E\{x(t)x^*(t+\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(t_1)x(t_1+\tau)\frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2(t_1)+x^2(t_1+\tau)}{2\sigma^2}} dx(t_1)dx(t_1+\tau)$$

$$= \begin{cases} 0 & \tau \neq 0 \\ \sigma^2 & \tau = 0 \end{cases}$$



Valkoinen kohina

- Johtuu varautuneiden partikkelien (elektronien) satunnaisesta liikkeestä johtavassa aineessa.
- Olkoon lämpötila T Kelviniä ja johtimen resistanssi R Ohmia, tällöin elektronien liike saa aikaan Normaalijakautuneen jännitteen jonka u keskiarvo on $0\mathrm{V}$ ja varianssi on

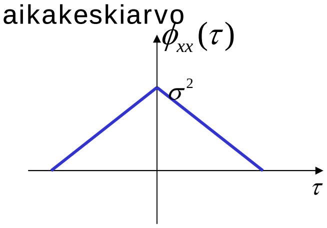
$$E\left\{u^2\right\} = \frac{2\left(\pi k T\right)^2}{3h} R \approx 1.9 \cdot 10^{-12} T^2 R$$

neliövolttia.

T lämpötila
k Bolzmannin vakio
h Plankin vakio

Stokastiset prosessit

- Esimerkki: Valkoisen kohinan aikakeskiarvo



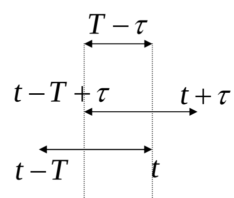
$$x(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} z(t)dt$$

$$\mathrm{E}\left\{x(t)\right\} = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} \mathrm{E}\left\{z(t)\right\} dt = 0$$

$$\phi_{xx}(\tau) = \mathrm{E}\left\{x(t)x(t+\tau)\right\} = \frac{1}{T^2}\int_{t-T}^{t}\int_{t-T+\tau}^{t+\tau} \mathrm{E}\left\{z(t_1)z(t_2)\right\} dt_1 dt_2$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_{t-T}^{t}\int_{t-T+\tau}^{t+\tau} \sigma^2 \delta\left(t_1 - t_2\right) dt_1 dt_2$$

$$= \frac{\sigma^2}{T^2}\int_{t\in\{t-T,t\}\cap\{t-T+\tau,t+\tau\}} dt = \begin{cases} \sigma^2 \dfrac{\left(T-|\tau|\right)}{T^2} & |\tau| < T \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$



Syklostationäärinen prosessi

- Prosessi on syklostationäärinen jos sen autokorrelaatiofunktio on periodinen

$$\phi_{xx}(t+\tau+kT, t+kT) = \phi_{xx}(t+\tau, t)$$

T jaksonaika

  – Keskimääräinen autokorrelaatio

$$\boxed{\bar{\phi}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} \phi_{xx}(t+\tau, t)dt}$$

Stokastiset prosessit

- Esimerkki: Tarkastellaan binäärisekvenssiä $\{b_n, \quad n = 1, 2, \ldots\}$, jossa arvot 0 ja 1 ovat yhtä todennäköisiä ja niiden arvot ovat toisistaan riippumattomia.

$$\Pr\{b_n = 1\} = 1 - \Pr\{b_n = 0\} = 0.5$$

  – Määritellään kuvaus bitistä "jännitetasoksi"

$$I_n = 2b_n - 1$$

$$\mathrm{E}\{I_n\} = -1 \bullet \Pr\{b_n = 0\} + 1 \bullet \Pr\{b_n = 1\} = 0$$

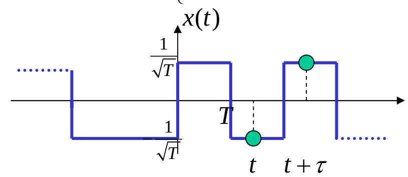
$$\phi_{II}(k) = \mathrm{E}\{I_n I_{n+k}\} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Syklostationäärinen prosessi

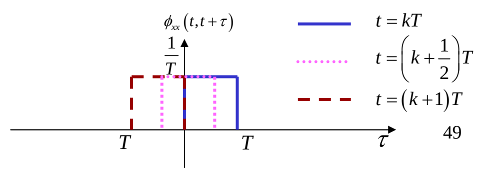
- Esimerkki. Jono satunnaisia toisistaan riippumattomia bittejä $\Pr\{I_k=-1\}=\Pr\{I_k=1\}=\frac{1}{2}$ $\quad E\{I_k I_l\}=\begin{cases}0 & k\neq l\\ 1 & k=l\end{cases}$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g(t-kT)$$

$$g(t)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{T}} & 0\le t\le T\\ 0 & muutoin\end{cases}$$



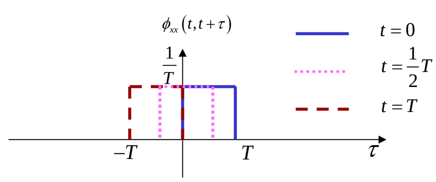
$$\phi_{xx}(t,t+\tau)=E\{x(t)x(t+\tau)\}=\begin{cases}\frac{1}{T} & kT-t\le\tau\le(k+1)T-t\\ 0 & muutoin\end{cases},kT\le t\le(k+1)T$$

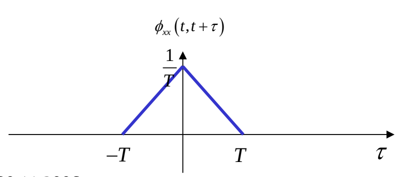


Syklostationäärinen prosessi

- Periodiselle signaalille pätee

$$\overline{\phi}_{xx}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T}\phi_{xx}(t+\tau,t)dt=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\phi_{xx}(t+\tau,t)dt$$





Syklostationäärinen prosessi

- Systemaattinen tapa

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g(t-kT)$$

$$\phi_{xx}(t,t+\tau)=E\left\{x(t)x(t+\tau)\right\}=E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} I_k I_l g(t-kT)g(t-lT)\right\}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} E\left\{I_k I_l\right\} g(t-kT)g(t+\tau-lT)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} E\left\{I_k I_{k+m}\right\} g(t-kT)g(t+\tau-(k+m)T)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{II}(m)g(t-kT)g(t+\tau-(k+m)T)$$

Syklostationäärinen prosessi

- Määritellään pulssin autokorrelaatio

$$\phi_{gg}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t+\tau)dt$$

- Keskimääräinen autokorrelaatio

$$\bar{\phi}_{xx}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} \phi_{xx}(t+\tau,t)dt=$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\phi_{II}(m)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}T-kT}^{\frac{1}{2}T-kT} g(t)g(t+\tau-mT)dt$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\phi_{II}(m)\phi_{gg}(\tau-mT)$$ **Konvoluutio**