

Luento 11

- Stokastisen prosessin tehospektri
- Signaalin suodatus
- Kaistarajoitettu kanava

5.12.2006

1

Stationaariset prosessit

- *Autokorrelaatio*

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x^*(t_2)\} = E\{x(t_1)x^*(t_1 + \tau)\}, \quad \tau = t_2 - t_1$$

jos prosessi on stationaarinen autokorrelaatio ei riipu ajasta t_1 vaan ainoastaan tarkasteluajanhetkien välistä τ

$$\phi_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x^*(t_1 + \tau)\} = \phi_{xx}(\tau) \quad \forall t_1$$

- *Ergodisuus*: Tilastolliset ominaisuudet voidaan määrittää yksittäisestä realisaatiosta. => Aikakeskiarvo vastaa oletusarvoa.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = E\{x(t)\} = m_x$$

- Ergodisen signaalin *keskimääräinen teho*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = E\{x(t)x^*(t)\} = \phi_{xx}(0)$$

5.12.2006

2

Stokastisen prosessin tehospektri

- Stationaarisen stokastisen prosessin korrelaatiofunktion Fourier muunnos

$$\Phi_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

x :n tehospektri

$$\Phi_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

x :n ja y :n ristitehospektri

- Käänteismuunnos

$$\phi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f) e^{i2\pi f\tau} df$$

x :n autokorrelaatio

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(f) e^{i2\pi f\tau} df$$

x :n ja y :n ristikorrelaatio

5.12.2006

3

Stokastisen prosessin tehospektri

- Realiselle prosessille $x(t) \in \mathbb{R}$
 - autokorrelaatio on symmetrinen ja reallinen

$$\phi_{xx}(-\tau) = \phi_{xx}(\tau) \in \mathbb{R}$$

- tehospektri on symmetrinen, reallinen ja ei-negatiivinen

$$\Phi_{xx}(-f) = \Phi_{xx}(f) \in \mathbb{R}^+$$

- Jos kaksi stokastista prosessia x ja y ovat ortogonaaleja $\phi_{xy}(\tau) = 0 \Rightarrow \Phi_{xy}(f) = 0$
 - Tällöin prosessille $z = x + y$ pätee

$$\phi_{zz}(\tau) = \phi_{xx}(\tau) + \phi_{yy}(\tau)$$

$$\Phi_{zz}(f) = \Phi_{xx}(f) + \Phi_{yy}(f)$$

5.12.2006

4

Esimerkki

- Esimerkki: Valkoisen kohinan aikakeskiarvo

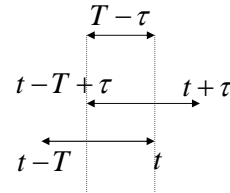
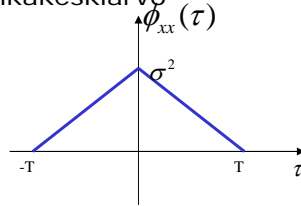
$$x(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t z(t) dt$$

$$E\{x(t)\} = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t E\{z(t)\} dt = 0$$

$$\phi_{xx}(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = \frac{1}{T^2} \int_{t-T}^t \int_{t-T+\tau}^{t+\tau} E\{z(t_1)z(t_2)\} dt_1 dt_2$$

$$= \frac{1}{T^2} \int_{t-T}^t \int_{t-T+\tau}^{t+\tau} \sigma^2 \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2$$

$$= \frac{\sigma^2}{T^2} \int_{t \in [t-T, t] \cap [t-T+\tau, t+\tau]} dt = \begin{cases} \sigma^2 \frac{(T-|\tau|)}{T^2} & |\tau| \leq T \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$



5.12.2006

5

Esimerkki

- Keskiarvoistetun kohinan autokorrelaatiofunktio

$$\phi_{xx}(\tau) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{T^2} (T - |\tau|) & |\tau| \leq T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases}$$

- Fourier muunnos

= Tehospektri

$$\Phi_{xx}(f) = \frac{\sigma^2}{T} \text{sinc}^2(fT)$$

- Kolmiopulssi aikatasossa

$$s(t) = \begin{cases} A(T - |t|) & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

- Fourier muunnos

$$S(f) = AT \text{sinc}^2(fT)$$

- Spektritiheys

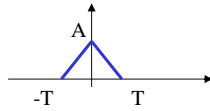
$$|S(f)|^2 = A^2 T^2 \text{sinc}^4(fT)$$

5.12.2006

6

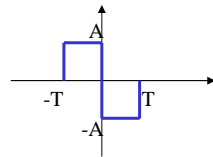
Esimerkki

- Kolmiopulssi



$$s(t) = \begin{cases} A(T - |t|) & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

- Kolmiopulssin aikaderivaatta



$$\frac{d}{dt}s(t) = A\Pi\left(\frac{t + \frac{1}{2}T}{T}\right) - A\Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T}\right)$$

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

5.12.2006

7

Esimerkki

- Fourier muunnetaan aikaderivaatta

$$\frac{d}{dt}s(t) = A\Pi\left(\frac{t + \frac{1}{2}T}{T}\right) - A\Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T}\right)$$

$$F\left\{A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = AT\text{sinc}(fT)$$

$$F\{s(t - \tau)\} = e^{-i2\pi f\tau} S(f)$$

$$F\left\{\frac{d}{dt}s(t)\right\} = AT\text{sinc}(fT)e^{i2f\frac{T}{2}} - AT\text{sinc}(fT)e^{-i2f\frac{T}{2}}$$

$$= i2AT\text{sinc}(fT)\sin(fT)$$

- \$s(t)\$:n Fourier-muunnos saadaan nyt integroimiskeinon avulla

$$S(f) = \frac{1}{i2\pi f} F\left\{\frac{d}{dt}s(t)\right\} = \frac{i2AT\text{sinc}(fT)\sin(fT)}{i2\pi f} = AT\text{sinc}^2(fT)$$

$$F\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\tau_1} s(\tau_1) d\tau_1 \dots d\tau_n\right\} = \frac{1}{(i2\pi f)^n} S(f)$$

5.12.2006

8

Stokastinen raja-arvo

- Stokastinen prosessi on *jatkuva lähes kaikilla realisaatioilla (almost all outcomes)*, jos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t + \varepsilon) = x(t)$$

$$\Pr\{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t + \varepsilon) \neq x(t)\} = 0$$

- Stokastinen prosessi on *jatkuva odotusarvon mielessä (mean sense, m.s.)* jos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E\{(x(t + \varepsilon) - x(t))^2\} = 0$$

tällöin myös

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E\{x(t + \varepsilon)\} = E\{x(t)\}$$

5.12.2006

9

Stokastinen raja-arvo

- Tarkastellaan stationaarista stokastista prosessia jonka autokorrelaatio funktio on jatkuva

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_{xx}(t + \varepsilon) = \phi_{xx}(t)$$

Prosessi on m.s. jatkuva jos sen autokorrelaatiofunktio on jatkuva

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E\{(x(t + \varepsilon) - x(t))^2\} = 0$$

$$E\{(x(t + \varepsilon) - x(t))^2\} = E\{x^2(t + \varepsilon)\} - 2E\{x(t + \varepsilon)x(t)\} + E\{x^2(t)\}$$

$$= \phi_{xx}(0) - 2\phi_{xx}(\varepsilon) + \phi_{xx}(0)$$

$$= 2\phi_{xx}(0) - 2\phi_{xx}(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

5.12.2006

10

Stokastinen derivaatta

- Derivaatta voidaan määritellä m.s. jatkuvalle prosessille

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x(t+\varepsilon) - x(t)}{\varepsilon} = 0$$

- Ristikorrelaatio

$$\begin{aligned} \phi_{x'x}(t_1, t_2) &= E \left\{ x'(t_1) x(t_2) \right\} = E \left\{ \frac{x(t_1 + \varepsilon) - x(t_1)}{\varepsilon} x(t_2) \right\} \\ &= E \left\{ \frac{x(t_1 + \varepsilon)x(t_2) - x(t_1)x(t_2)}{\varepsilon} \right\} = \frac{\phi_{xx}(t_1 + \varepsilon, t_2) - \phi_{xx}(t_1, t_2)}{\varepsilon} \rightarrow \frac{d}{dt_1} \phi_{xx}(t_1, t_2) \end{aligned}$$

- Autokorrelaatio

$$\begin{aligned} \phi_{x'x'}(t_1, t_2) &= E \left\{ \frac{x(t_1 + \varepsilon) - x(t_1)}{\varepsilon} x'(t_2) \right\} = E \left\{ \frac{x(t_1 + \varepsilon)x'(t_2) - x(t_1)x'(t_2)}{\varepsilon} \right\} \\ &= \frac{\phi_{x'x'}(t_1 + \varepsilon, t_2) - \phi_{x'x'}(t_1, t_2)}{\varepsilon} \rightarrow \frac{d}{dt_1} \phi_{x'x'}(t_1, t_2) = \frac{d^2}{dt_1 dt_2} \phi_{xx}(t_1, t_2) \end{aligned}$$

5.12.2006

11

Stokastinen derivaatta

- Tarkastellaan stationaarista stokastista prosessia jonka autokorrelaatio funktio on jatkuva

$$\begin{aligned} \phi_{x'x'}(\tau) &= \phi_{x'x'}(t, t + t_2 - t_1) = \frac{d^2}{dt_1 dt_2} \phi_{xx}(t_2 - t_1) & \tau = t_2 - t_1 \\ &= -\frac{d^2}{dt_1 dt_2} \phi_{xx}(t_2 - t_1) = -\frac{d^2}{d\tau^2} \phi_{xx}(\tau) \end{aligned}$$

5.12.2006

12

Stokastinen integraali

- Integraali

$$s = \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt$$

m. s. olemassa, jos

$$E \left\{ \left[s - \sum_{k=0}^{\frac{T}{\Delta t} - 1} x(k\Delta t) \Delta t \right]^2 \right\} \rightarrow 0, \quad \Delta t \rightarrow 0$$

- Oletusarvo

$$E\{s\} = \int_{t_1}^{t_2} E\{x(t)\} dt = \int_{t_1}^{t_2} \eta_x(t) dt$$

- 2. Momentti

$$E\{s^2\} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} E\{x(t_1)x(t_2)\} dt_1 dt_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \phi_{xx}(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

5.12.2006

13

Stokastisen prosessin tehospektri

- Prosessi – autokorrelaatio - tehospektri

$$x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \phi_{xx}(-\tau) = \phi_{xx}(\tau) \Leftrightarrow \Phi_{xx}(-f) = \Phi_{xx}(f)$$

$x(t)$	$\phi_{xx}(\tau)$	$\Phi_{xx}(f)$
$ax(t)$	$ a ^2 \phi_{xx}(\tau)$	$ a ^2 \Phi_{xx}(f)$
$\frac{d}{dt} x(t)$	$-\frac{d^2}{d\tau^2} \phi_{xx}(\tau)$	$(2\pi f)^2 \Phi_{xx}(f)$
$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$-\frac{d^{2n}}{d\tau^{2n}} \phi_{xx}(\tau)$	$(2\pi f)^{2n} \Phi_{xx}(f)$
$x(t)e^{\pm i2\pi f_c t}$	$\phi_{xx}(\tau)e^{\pm i2\pi f_c \tau}$	$\Phi_{xx}(f \mp f_c)$

5.12.2006

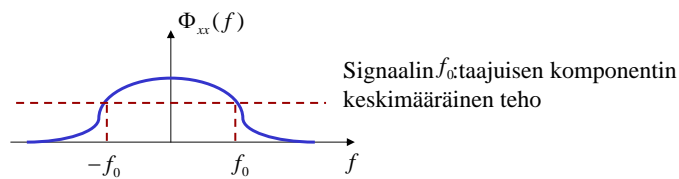
14

Stokastisen prosessin tehospektri

- Tehospektrin tulkinta

$$\phi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f) e^{i2\pi f\tau} df = E\{x(t)x^*(t+\tau)\}$$

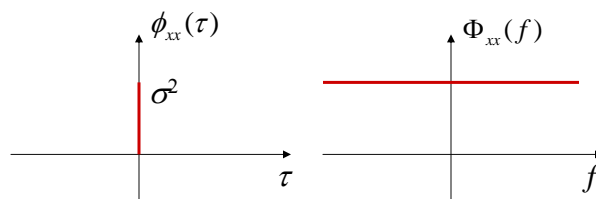
$$\phi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f) df = E\{|x(t)|^2\} \quad \text{Tehospektrin pinta-ala vastaa signaalin keskimääräinen tehoa}$$



5.12.2006

15

Valkoinen kohina



Valkoisen kohinan energia on tasajakautunut kaikille taajuuksille.

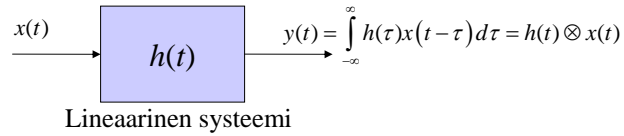
$$\phi_{xx}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau)$$

$$\Phi(f) = \sigma^2 \quad \forall f \in \mathbb{R}$$

5.12.2006

16

Satunnaissignaali lineaarisessa järjestelmässä



- Ristikorrelaatio

$$\begin{aligned} \phi_{yx}(\tau) &= E\{y(t)x^*(t+\tau)\} = E\{y(t'+\tau)x^*(t')\} \\ &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t'+\tau-\lambda)x^*(t')dt\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)E\{x(t'+\tau-\lambda)x^*(t')\}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\phi_{xx}(\tau-\lambda)dt = h(\tau) \otimes \phi_{xx}(\tau) \quad \text{konvoluutiointegraali} \end{aligned}$$

5.12.2006

17

Satunnaissignaali lineaarisessa järjestelmässä

- Autokorrelaatio

$$\begin{aligned} \phi_{yy}(\tau) &= E\{y(t)y^*(t+\tau)\} = E\{y(t+\tau)y^*(t)\} \\ &= E\left\{y(t)\int_{-\infty}^{\infty} h^*(\lambda)x^*(t'+\tau-\lambda)dt\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)E\{y(t)x^*(t'+\tau-\lambda)\}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\phi_{yx}(\tau-\lambda)dt = h(\tau) \otimes \phi_{yx}(\tau) \end{aligned}$$

5.12.2006

18

Suodattimen tehospektri

- Konvoluutiota z -tasossa vastaa kertolasku f -tasossa, joten

$$\Phi_{yx}(f) = H(f)\Phi_{xx}(f)$$

$$\Phi_{yy}(f) = H^*(f)\Phi_{yx}(f)$$

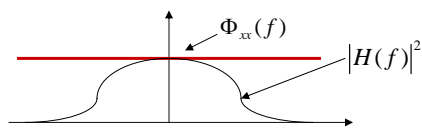
$$\Phi_{yy}(f) = |H(f)|^2 \Phi_{xx}(f)$$

Wiener-Khintchine
teoreema

5.12.2006

19

Kohinan suodattaminen



$$\Phi_{yy}(f) = |H(f)|^2 \Phi_{xx}(f)$$

5.12.2006

20

Stokastiset differentiaaliyhtälöt

- Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

missä $x(t)$ on jokin stokastinen prosessi, jonka tehospetri on $\Phi_{xx}(f)$

- Ratkaistaan differentiaaliyhtälön impulssivasteen Fourier muunnos $x(t) = \delta(t)$

$$\sum_{k=0}^n a_k (i2\pi f)^k Y(f) = \sum_{k=0}^m b_k (i2\pi f)^k X(f) \quad \text{Fourier muunnetaan itse differentiaaliyhtälö}$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (i2\pi f)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (i2\pi f)^k} \quad X(f) = 1 \text{ impulssin tapauksessa.}$$

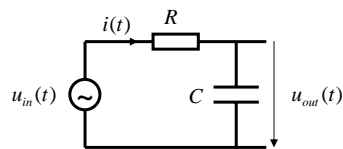
- Tehospetri

$$\Phi_{yy}(f) = |H(f)|^2 \Phi_{xx}(f) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (i2\pi f)^k \sum_{k=0}^m b_k (-i2\pi f)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (i2\pi f)^k \sum_{k=0}^n a_k (-i2\pi f)^k} \Phi_{xx}(f)$$

5.12.2006

21

Esimerkki. RC-suodatin



$$i(t) = C \frac{d}{dt} u_{out}(t)$$

$$u_{in}(t) = Ri(t) + u_{out}(t)$$

$$\frac{d}{dt} u_{out}(t) = \frac{1}{RC} (u_{in}(t) - u_{out}(t))$$

Impulssivaste

$$\frac{d}{dt} h(t) = \frac{1}{RC} (\delta(t) - h(t))$$

$$\Rightarrow i2\pi f H(f) = \frac{1}{RC} (1 - H(f))$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{1}{i2\pi f + \frac{1}{RC}}$$

Tehospetri

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{i2\pi fRC + 1} \frac{1}{-i2\pi fRC + 1} = \frac{1}{(2\pi fRC)^2 + 1}$$

5.12.2006

22

Esimerkki. RC-suodatin

- Lähtösignaaliin muodostuu jännitelähteen muodostamasta signaalista ja termisestä kohinasta

$$u_m(t) = e(t) + x(t)$$

$$\Phi_{xx}(f) = \frac{1}{2} N_0$$

$$E\{x(t)\} = 0$$

$$e(t) = U \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\Phi_{ee}(f) = |E(f)|^2 = \frac{U^2}{4} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$

$$E(f) = \frac{U}{2} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$

- Ulostulo muodostuu kahdesta signaalista

$$u_{out}(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e(t-\lambda)h^*(\lambda)d\lambda}_y + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\lambda)h^*(\lambda)d\lambda}_z = y(t) + z(t)$$

5.12.2006

23

Esimerkki. RC-suodatin

- Ulostulosignaalin autokorrelaatio

$$\phi_{zy}(\tau) = E\{z(t)y^*(t+\tau)\} = E\{z(t)\}E\{y^*(t+\tau)\} = 0$$

$$\phi_{yz}(\tau) = E\{y(t+\tau)z^*(t)\} = E\{y(t+\tau)\}E\{z^*(t)\} = 0$$

$$E\{z(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E\{x(t-\lambda)\}h^*(\lambda)d\lambda$$

$$\phi_{uu}(\tau) = \phi_{yy}(\tau) + \phi_{zz}(\tau) = \phi_{yy}(\tau) + \phi_{zz}(\tau)$$

Ristitermit menevät nolliin, koska signaalit y ja z ortogonaaliset

- Ulostulon tehosppektri

$$\Phi_{uu}(f) = |H(f)|^2 (|E(f)|^2 + \Phi_{xx}(f))$$

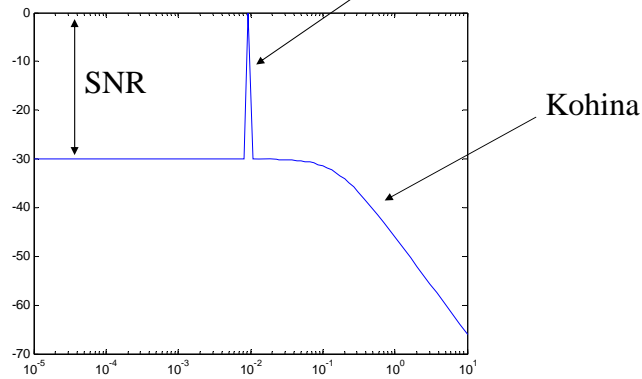
$$= \frac{1}{4} |H(f_0)|^2 (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)) + \frac{1}{2} N_0 |H(f)|^2$$

5.12.2006

24

RC-suodatin

- RC-Suodattimen tehospektri



5.12.2006

25

Kohinan suodattaminen

Spektraalifaktorointi

Tehospektriä

$$\Phi_{yy}(f) = |H(f)|^2 \Phi_{xx}(f)$$

vastaa kaksi erilaista prosessia. Toisessa suodattimena on $H(f)$ ja toisessa $H^*(f)$. Molemmilla on samat tilastolliset ominaisuudet.

Esimerkki

$$\Phi_{yy}(f) = \frac{1}{(2\pi f)^2 + 1} \Phi_{xx}(f)$$

$$H(f) = \frac{1}{1 + i2\pi f} \Leftrightarrow h(t) = e^{-t}$$

Stabiili IIR (Infinite Impulse Response) suodin

$$H^*(f) = \frac{1}{1 - i2\pi f} \Leftrightarrow h(t) = e^t$$

Epästabiili IIR suodin

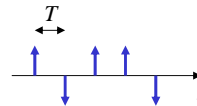
5.12.2006

26

Diskreettiaikaisen prosessin tehospektri

- Tarkastellaan prosessia

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k \delta(t - kT)$$



missä I_k on jokin diskreettiaikainen stokastinen prosessi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k \delta(t - kT)$$

$$\phi_{xx}(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = \begin{cases} E\{I_t I_{t+k}\} \delta(\tau) & \tau = kT \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$

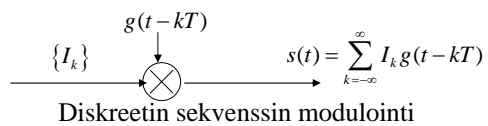
$$\phi_{xx}(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = \begin{cases} \phi_{II}(k) & \tau = kT \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$

$$\Phi_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_{II}(k) e^{-2\pi f k T} \quad \text{Diskreetti Fourier muunnos}$$

5.12.2006

27

Moduloitu bittisekvenssi



- Voidaan tulkita konvoluutioksi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k \delta(t - kT)$$

$$s(t) = x \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k \delta(\tau - kT) g(t - \tau) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g(t - kT)$$

- Tehospektri

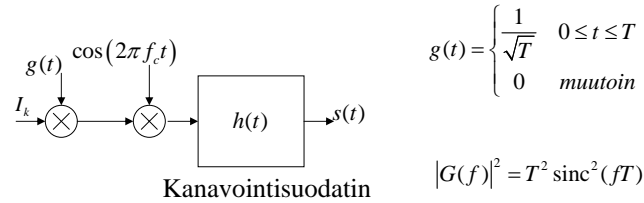
$$\Phi_{ss}(f) = |G(f)|^2 \Phi_{xx}(f)$$

5.12.2006

28

Lähetin

- Lineaarinen amplitudi modulaatio



$$\Phi_{ss}(f) = H(f) \left(\frac{1}{2} G(f + f_c) + \frac{1}{2} G(f - f_c) \right) \Phi_{II}(f)$$

- Jos symbolit $I_k \in \{\pm 1\}$ toisistaan riippumattomia satunnaismuuttujia, $\Phi_{II}(f) = 1$
- Jos kanavointisuodatinta ei käytetä $|H(f)|^2 = 1$

5.12.2006

29

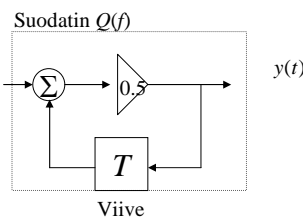
Kanavakoodaus

- Prosessoidaan lähetettävää bittijonoa

$$Y_k = \frac{1}{2}(Y_{k-1} + I_k) \in \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, 0 \right\}$$

- Tulkinta

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k \delta(t - kT)$$



$$Q(f) = \frac{1}{2 - e^{-i2\pi fT}}$$

- Tehospektri

$$\Phi_{YY}(f) = |Q(f)|^2 \Phi_{II}(f)$$

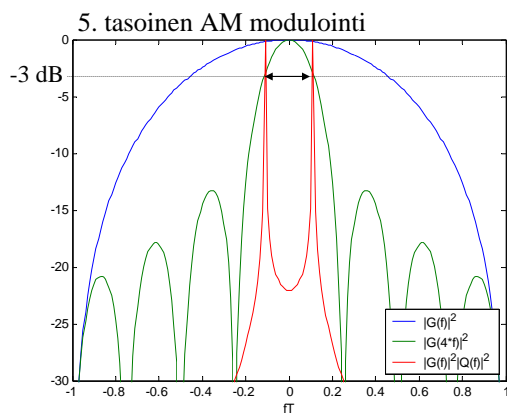
Eli käsittelemällä lähetettävää bittijonoa (koodaamalla) voidaan vaikuttaa myös tehospektriin.

5.12.2006

30

Moduloidun signaalin spektri

- Koodaamalla kaista kapenee, mutta samalla myös siirrettävän informaation määrä vähenee samassa suhteessa.

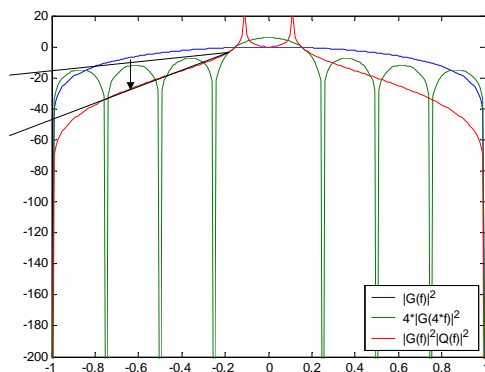


5.12.2006

31

Moduloidun signaalin spektri

- Mitä "pehmeämmin" signaali muttuu ajassa, sitä kapeammalle kaistalle signaalin energia on jakautunut.

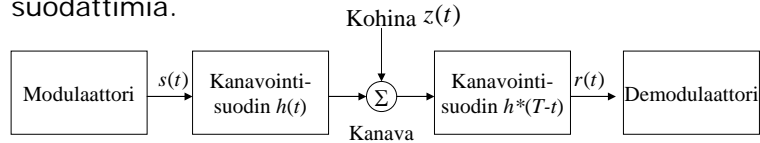


5.12.2006

32

Kaistarajoitettu kanava

- Pulssimuotoisten modulointimenetelmien ongelmana on niiden spektrin leveys, eli naapurikaistalle vuotavan tehon suuri määrä.
- Kaistan rajoittamiseksi käytetään kanavointisuodattimia.



$$\Phi_{rr}(f) = |X(f)|^2 |S(f)|^2 + |H(f)|^2 \Phi_{zz}(f)$$

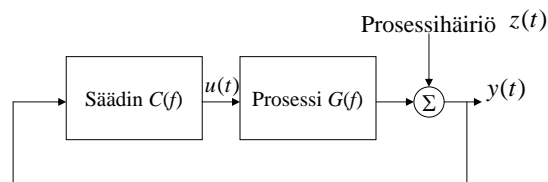
$$X(f) = |H(f)|^2$$

5.12.2006

33

Säätötekniikkaa...

- Lineaarinen regulaattori



$$\Phi_{yy}(f) = \left| \frac{C(f)G(f)}{1 + C(f)G(f)} \right|^2 \Phi_{zz}(f)$$

- Neliöllinen säätövirhe $E\{y^2(t)\} = \Phi_{yy}(0)$
- Minimivarianssisäätö

$$\min_{C \in C(G)} \Phi_{yy}(0)$$

$C(G)$ Prosessin G stabiloivien säädintien joukko

$$C(G) = \left\{ C(f) : \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C(f)G(f)}{1 + C(f)G(f)} e^{-j2\pi ft} df < \infty \quad \forall t \right\}$$

5.12.2006

34