

12. Luento

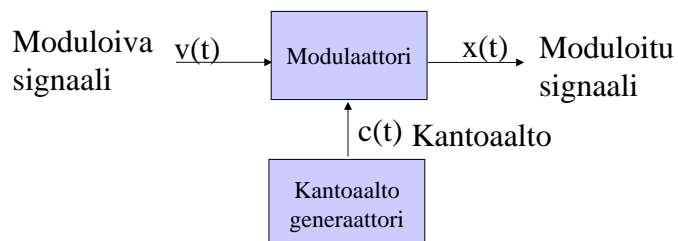
- Analoginen modulaatio
- Digitaalinen modulaatio

5.12.2006

1

Modulaatio

- *Modulaatiossa siirretään moduloivan signaalin spektri moduloitun signaalin taajuusalueelle, joko siten että*
 - spektrin muoto säilyy *linearisessa modulaatiossa*, tai niin että
 - spektrin muoto muuttuu *epälinearisessa modulaatiossa*



5.12.2006

2

Modulaatio

Modulaatiota käytetään:

- Siirrettävillä signaaleilla päällekkäisiä spektrikomponentteja
 - Jos siirrettävien signaalien spektrit ovat osittain tai kokonaan päällekkäisiä voidaan siirtokanavassa siirtää vain yksi signaali ilman modulaatiota
- Moduloivan signaalin taajuuskaista saattaa olla häiriöllinen
 - Esim. ilmakehästä tulevat ukkoshäiriöt ja ihmisen aiheuttamat häiriöt ovat voimakkaampia matalilla taajuuksilla
- Signaalin sovittaminen siirtomeediaan
 - Esim. radioantennin koko (vähintään $\lambda/10$) olisi 300 Hz äänitaajuudella 100 km. 3 kHz taajuudella taas riittäisi 10 km. Sen lisäksi että nämä pituudet ovat käytännössä useimmiten mahdottomia, antennin tulevan signaalin suhteellisen kaistaleveyden tulee olla pieni.
- Siirtomeedian tehokas hyväksikäyttö
 - Siirtojohtoissa ja radiotaajuusalueessa saadaan moninkertainen siirtokapasiteetti käyttämällä modulaatioon perustuvaa taajuusjakokanavoittoa
- Suorituskyvyn parantaminen kohinaisessa ja interferenssiä sisältävässä siirtokanavassa
 - Esimerkiksi hajaspektritekniikka

5.12.2006

3

Modulointi

- Moduloivana signaalina käytetään

- Siniaaltoa

$$c(t) = \sqrt{2P_c} \cos(2\pi f_c t + \phi)$$

P_c kantaallon keskimääräinen teho

f_c kantaallon taajuus

ϕ kantaallon perusvaihe

Modulaatiossa kantaallon amplitudi, vaihe tai hetkellinen taajuus tai useita kantaalltoparametreja muuttuu (yleensä lineaarisesti) moduloivan signaalin amplitudin funktiona.

- Esim. Amplitu-, vaihe- ja taajuusmodulaatio

5.12.2006

4

Modulointi

- Pulssijonoa

$$c(t) = \sum_k a_k p_k(t - \tau_k - kT)$$

- $p_k(t)$ pulssin muoto
 a_k pulssin amplitudi
 τ_k pulssinpaikka näytejonossa
 T näytejakson pituus

Pulssimodulaatioissa pulssijonon yksittäisten pulssien amplitudi, kesto tai paikka muuttuu (yleensä lineaarisesti) moduloivan signaalinäytteen amplitudin funktiona

- Esim. Pulssinpituus modulaatio, UWB-impulssiradio
- Satunnaissignaalia

5.12.2006

5

Siniaaltoon perustuva modulaatio

- Modulaatiomenetelmät voidaan jakaa
 - Analoginen modulaatio: moduloiva signaali on jatkuva-amplitudinen ja jatkuva-aikainen
 - Digitaalinen modulaatio: moduloiva signaali on diskreetti-amplitudinen ja diskreetti-aikainen
- Kummassakin tapauksessa moduloitu signaali on jatkuva amplitudinen ja jatkuva-aikainen
- Demoduloinnin tehtävänä on palauttaa alkuperäinen signaali moduloidusta signaalista.
 - Koherentti modulaatio: Modulaattori ohjaa suoraan signaalin vaihetta.
 - Epäkoherentti modulaatio: Modulaattori ohjaa signaalin taajuutta.
 - Koherentti vastaanotto: Vastaanotetun signaalin vaihe tunnetaan.
 - Epäkoherentti vastaanotto: Signaalin vaihetta ei tunneta.

5.12.2006

6

Modulointi

		analogiset modulaatio- menetelmät	digitaaliset modulaatio- menetelmät
lineaariset modulaatio-menetelmät		AM, DSB, SSB, VSB	ASK, QAM
epälineaariset modulaatio- menetelmät	vaihemodu- laatiot	PM	PSK, CPM
	taajuusmodu- laatiot	FM	FSK

5.12.2006

7

Modulointitaajuuden valinta

- Mitä suurempi on signaalin taajuuskaista sitä suurempi on myös modulointitaajuuden oltava.
- Käytännössä

$$0.01 < \frac{W}{f_c} < 0.1$$

W Signaalin puolentehonkaistanleveys
 f_c kantoaallon taajuus

Taajuuskaista	Kantoaallon taajuus	Signaalin kaistanleveys ($0.02f_c$)
Pitkäaalto	100 kHz	2 kHz
Lyhytaalto	5 MHz	100 kHz
VHF	100 Mhz	2 Mhz
Mikroaalto	5 GHz	100 MHz
Millimetriaalto	100 GHz	2 GHz
Optinen	$5 \cdot 10^{14}$ Hz	10^3 Hz

5.12.2006

8

Ekvivalentti alipäästösignaali esitys

- Tarkastellaan moduloitua sinimuotoista signaalia

$$x(t) = a(t) \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) = \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{a(t)e^{i\phi(t)}}_{x_I(t)} e^{i2\pi f_c t} \right\}$$

- Ekvivalentti alipäästösignaali

$$x_I(t) = a(t)e^{i\phi(t)} = a(t) \cos \phi(t) + ia(t) \sin \phi(t)$$

- Reaalisen moduloitun signaalin $x(t)$ sijaan analyysi voidaan suorittaa käyttäen kompleksia kantataajuista signaalia $x_I(t)$, kunhan huomataan, että ekvivalentin alipäästösignaalin teho on kaksinkertainen todellisen moduloitun signaalin tehoon nähden.

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = \frac{1}{2} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_I(t) dt = \frac{1}{2} P_{x_I}$$

5.12.2006

9

Ekvivalentti alipäästösignaali esitys

- Tarkastellaan moduloitua signaalia

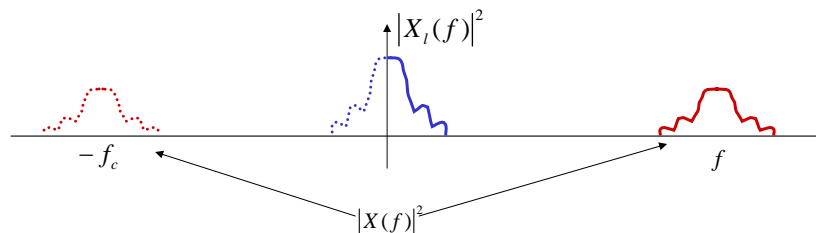
$$x(t) = v(t) \cos(2\pi f_c t) = \operatorname{Re} \{ v(t) e^{i2\pi f_c t} \}$$

$$x_I(t) = v(t)$$

$$X(f) = \frac{1}{2} (V(f - f_c) + V(f + f_c))$$

$$X_I(f) = V(f)$$

$v(t)$ on moduloitava signaali
 f_c kantaallon taajuus



5.12.2006

10

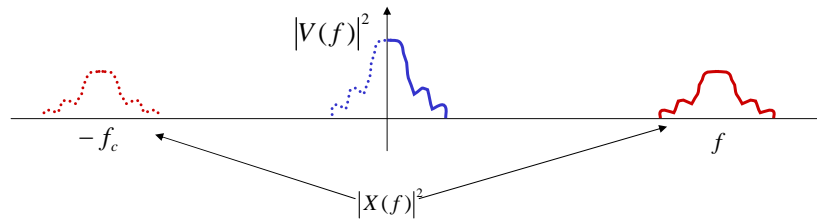
DSB Amplitudi modulaatio

DSB (Double-sideband suppressed carrier) modulaatio

$$x(t) = v(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$X(f) = \frac{1}{2}(V(f - f_c) + V(f + f_c))$$

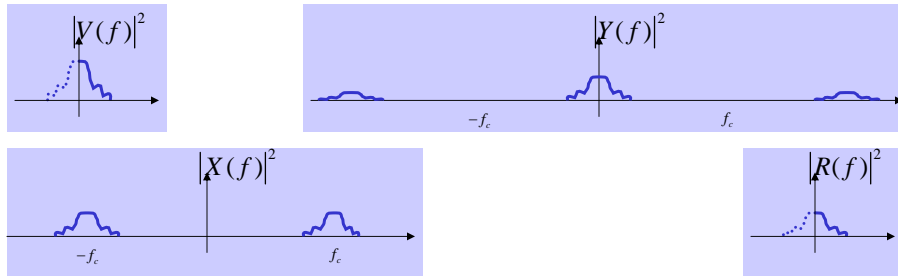
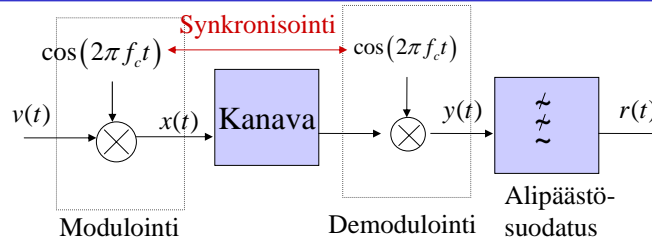
$v(t)$ on moduloitava signaali
 f_c kantaallon taajuus



5.12.2006

11

Modulaatio ja demodulaatio (DSB)



5.12.2006

12

Modulaatio ja demodulaatio (DSB)

- Analoginen moduloiva signaali

$$v(t)$$

- Moduloitu signaali

$$x(t) = v(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$X(f) = \frac{1}{2}(V(f - f_c) + V(f + f_c))$$

- Vastaanotuksessa sekoitettu signaali

$$y(t) = v(t) \cos^2(2\pi f_c t) = v(t) \frac{1}{2}(1 + \cos(4\pi f_c t))$$

$$y(f) = \frac{1}{2}(X(f - f_c) + X(f + f_c)) = \frac{1}{2}V(f) + \frac{1}{4}(V(f - 2f_c) + V(f + 2f_c))$$

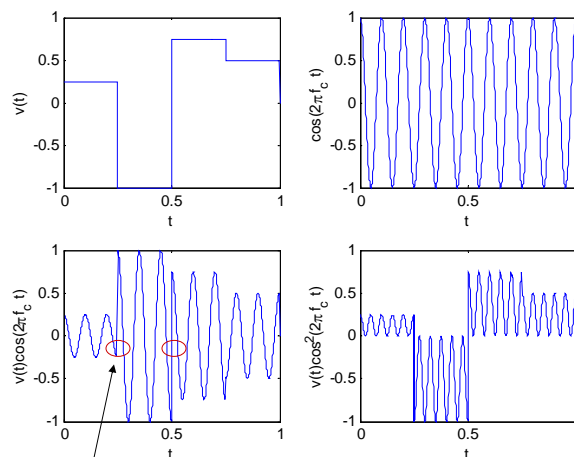
- Suodatetaan korkeat taajuudet pois

$$r(t) = \frac{1}{2}v(t)$$

5.12.2006

13

DSB Amplitudi modulaatio

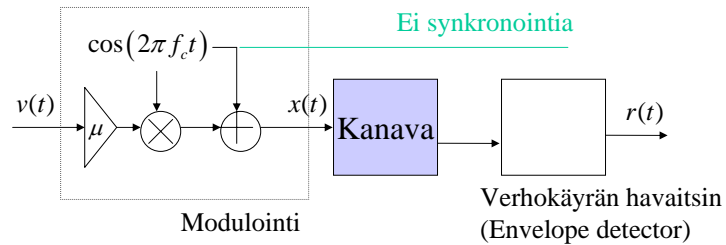


Vaihe muuttuu 180°

5.12.2006

14

AM Amplitudi modulaatio



AM modulaatio (Amplitude modulation)

- Olkoon signaalin teho rajoitettu
 $|v(t)|^2 \leq 1$
- Tarkastellaan modulaatiota μ modulaatio indeksi

$$x(t) = (1 + \mu v(t)) \cos(2\pi f_c t), \quad 0 < \mu < 1$$

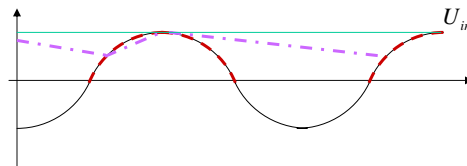
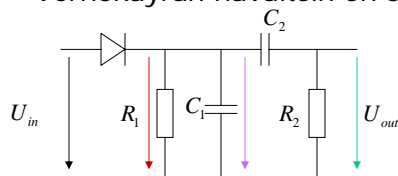
$$X(f) = \frac{1}{2} (\mu V(f - f_c) + \delta(f - f_c) + \mu V(f + f_c) + \delta(f + f_c))$$

5.12

15

AM Amplitudi modulaatio

- Verhokäyrän havaitsin on suodatin



5.12.2006

16

AM vrt DSB

- DSB moduloinin vastaanotossa tarvitaan tieto signaalin vaiheesta
- AM modulaattorin vastaanotin perustuu verhoikäyrän havaittajaan => Paljon helpompi toteuttaa kuin DSB
- AM moduloitussa signaalissa tehoa kuluu informaation siirtämisen lisäksi kanta-aallon siirtoon => DSB on energia tehokkaampi

$$x_{DSB,l}(t) = v(t) \Rightarrow P_{x,DSB} = \frac{1}{2} P_{v,DSB}$$

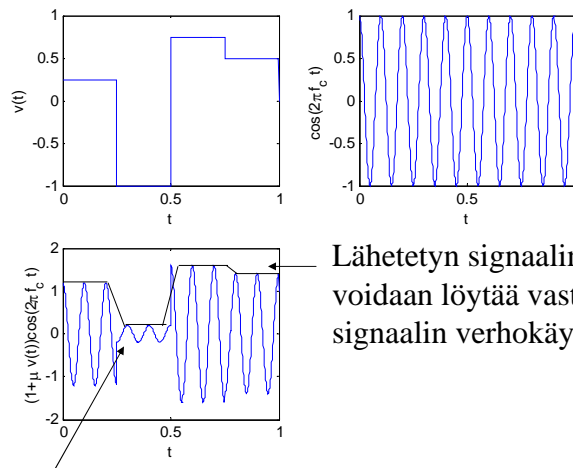
$$x_{AM,l}(t) = \mu v(t) + 1 \Rightarrow P_{x,DSB} = \frac{1}{2} (\mu^2 P_{v,DSB} + 1)$$

kanta-aallon teho

5.12.2006

17

AM modulaatio



Lähetetyn signaalin aaltomuoto voidaan löytää vastaanotetun signaalin verhoikäyrästä.

Ei vaiheen muutosta
5.12.2006

18

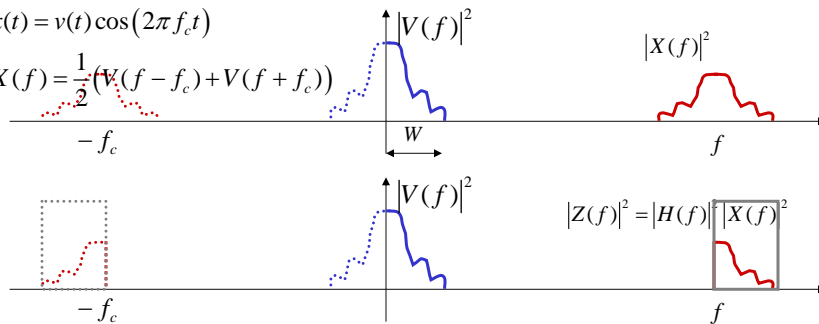
SSB amplitudimodulaatio

SSB (Supressed-sideband amplitude modulation)

- Kuten DSB, mutta signaalista suodatetaan peilikuva osuus pois. Tarvittava taajuuskaista puolittuu.

$$x(t) = v(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$X(f) = \frac{1}{2}(V(f - f_c) + V(f + f_c))$$



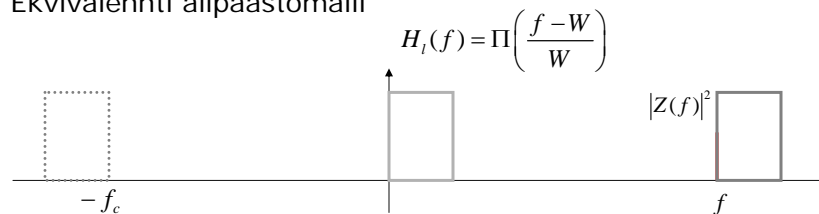
$$H(f) = \frac{1}{2} \left(\Pi\left(\frac{f - f_c}{W}\right) + \Pi\left(\frac{f + f_c - W}{W}\right) \right)$$

5.12.2006

19

SSB modulaatio

- Ekvivalentti alipäästömalli



- Jos suodattimen päästökaista on äärettömän pitkä niin

$$H_i(f) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign } f)$$

$$\hat{v}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau) \frac{1}{t - \tau} d\tau \quad v(t)\text{:n Hilbert muunnos}$$

$$X_i(f) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign } f)V(f)$$

$$x_i(t) = \frac{1}{2}(v(t) + i\hat{v}(t))$$

5.12.2006

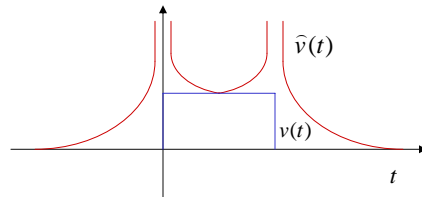
20

SSB modulaatio

- Hilbert muunnos on konvoluutio $1/(\pi t)$:n kanssa

$$\hat{v}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau) \frac{1}{t-\tau} d\tau$$

- Selvästikkään pulssin Hilbert muunnos ei ole kaikkialla äärellinen => Ei siis soveltu datan siirtoon.



- Monissa käytännön sovelluksissa joudutaan siis tyytymään siihen, että siirtoon tarvittava taajuuskaista on $2W$.

5.12.2006

21

AM amplitudimodulaatio ja kohina

- Gaussinen kanava (z on valkoista kohinaa)

$$z(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) + n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$E\{n_I^2(t)\} = E\{n_Q^2(t)\} = \frac{1}{2} N_0, \quad E\{z^2(t)\} = \frac{1}{2} N_0$$

Vastaanotettu signaali, ennen havaitsemista

$$y(t) = x(t) + z(t) = (A_c(1 + \mu v(t)) + n_I(t)) \cos(2\pi f_c t) + n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

- Ekvivalentti alipäästö signaali

$$y_I(t) = A_c(1 + \mu v(t)) + n_I(t) + n_Q(t) e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$y_I(t) = \sqrt{(A_c(1 + \mu v(t)) + n_I(t))^2 + n_Q(t)^2} e^{i \arctan\left(\frac{n_Q(t)}{(1 + \mu v(t)) + n_I(t)}\right)}$$

- Signaali-kohina-suhde SNR (signal-to-noise-ratio)

$$SNR_r = \frac{\frac{A_c^2}{T} \int_0^T |1 + \mu v(t)|^2 dt}{E\{|n_I(t) - in_Q(t)|^2\}} \sim \frac{A_c^2}{N_0}$$

5.12.2006

22

AM amplitudimodulaatio ja kohina

- Jos $SNR \gg 1$

$$\sqrt{(A_c(1 + \mu v(t)) + n_I(t))^2 + n_Q(t)^2} \approx A_c(1 + \mu v(t)) + n_I(t)$$

Verhokäyrän havaitsemisen jälkeen signaali kohina suhde on siis

$$SNR_d = \frac{\frac{A_c^2}{T} \int_0^T |1 + \mu v(t)|^2 dt}{E\{n_I(t)\}} \approx 2SNR_r \quad \text{Kohina suodattuu.}$$

- Jos $SNR \ll 1$

$$|y_c(t)| \approx \left(\sqrt{n_I^2(t) + n_Q^2(t)} + A_c(1 + \mu v(t)) \right) \quad \text{Kohinan ja signaalin osat vaihtuvat.}$$

$$SNR_d = SNR_r \quad \text{Rayleigh jakautunut satunnaisuus}$$

Verhokäyrän havaitsin seuraa lähinnä kohinaa.

5.12.2006

23

Vaihe- ja taajuusmodulaatio

- Vaihemodulaatio (PM, phase modulation)

$$x(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi_0 v(t)) = \text{Re}\{e^{i\phi_c(t)}\}$$

$$\phi_c(t) = 2\pi f_c t + \phi_0 v(t)$$

$$0 < \phi_0 \leq \frac{\pi}{2}, \quad |x(t)| < 1$$

- Kulman muutos nopeus ja hetkellinen taajuus

$$2\pi f(t) = \frac{d}{dt} \phi_c(t) = 2\pi f_c + \phi_0 \frac{d}{dt} v(t)$$

- Taajuus modulaatio

$$f(t) = f_c + f_0 v(t)$$

$$0 < f_0 < f_c$$

$$2\pi f(t) = 2\pi f_c + \frac{d}{dt} \phi_c(t) \Rightarrow \phi_c(t) = 2\pi f(t - t_0) + \int_{t_0}^t f_0 v(\tau) d\tau$$

5.12.2006

24

Vaihe- ja taajuusmodulaatio

- Vaihemodulaatio

$$2\pi f(t) = \frac{d}{dt} \phi_c(t) = 2\pi f_c + \phi_0 \frac{d}{dt} v(t)$$

- Taajuus vaihtelee rajusti jos moduloitava signaali on epäjatkua tai sisältää kohinaa.

- Taajuusmodulaatio

$$\phi_c(t) = 2\pi \left(f_c(t-t_0) + f_0 \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \right) \quad \left| \int_{t_0}^{\infty} v(t) dt \right| < \infty$$

- Integraali kasvaa rajatta jos moduloitava signaali sisältää dc-komponentin

- Moduloidun signaalin amplitudi on riippumaton $v(t)$:stä
=> Moduloidun signaalin energia (lähes) riippumaton $v(t)$:stä!
- Tehospektriä ei voida ratkaista analyttisesti yleisessä tapauksessa.

5.12.2006

25

Vaihe- ja taajuusmodulaatio

- Moduloidun signaali voidaan jakaa I ja Q haaroihin

$$x(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) = \underbrace{\cos \phi(t)}_{x_I(t)} \cos(2\pi f_c t) + \underbrace{\sin \phi(t)}_{x_Q(t)} \sin(2\pi f_c t)$$

- Tarkastellaan tapausta, jossa $|\phi(t)| < 1$

$$x_I(t) = \cos \phi(t) = 1 - \frac{1}{2!} \phi^2(t) + \dots \approx 1$$

$$x_Q(t) = \sin \phi(t) = \phi(t) - \frac{1}{3!} \phi^3(t) + \dots \approx \phi(t)$$

$$x(t) \approx \cos(2\pi f_c t) + \phi(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$X(f) \approx \frac{1}{2} \left(V(f-f_c) e^{-i\frac{\pi}{2}} + \delta(f-f_c) + V(f+f_c) e^{i\frac{\pi}{2}} + \delta(f+f_c) \right)$$

Tehospektri (lähes) sama kuin AM modulaation tapauksessa

5.12.2006

26

Vaihe- ja taajuusmodulaatio

- Mielivaltaista funktiota voidaan approksimoida summana sini ja kosini termejä (Fourier-sarja).
- Tone-modulaatio: Modulaatioindeksi

$$v(t) = \begin{cases} A \cos 2\pi f_m t & \text{PM} \\ A \sin 2\pi f_m t & \text{FM} \end{cases} \Rightarrow \phi(t) = \beta \sin 2\pi f_m t, \beta = \begin{cases} A\phi_0 & \text{PM} \\ \frac{A f_0}{f_m} & \text{FM} \end{cases}$$

$$x(t) = \underbrace{\cos(\beta \sin(2\pi f_m t))}_{x_I(t)} \cos(2\pi f_c t) + \underbrace{\sin(\beta \sin(2\pi f_m t))}_{x_Q(t)} \sin(2\pi f_c t)$$

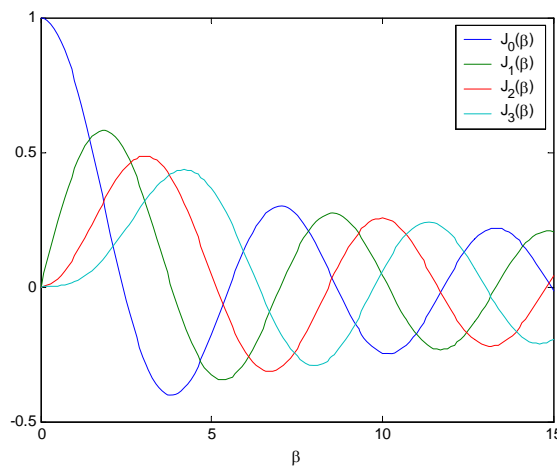
$$x_I(t) = \cos(\beta \sin(2\pi f_m t)) = J_0(\beta) + \sum_{k=1}^{\infty} 2J_{2k}(\beta) \cos(2\pi(2k) f_m t)$$

$$x_Q(t) = \sin(\beta \sin(2\pi f_m t)) = \sum_{k=0}^{\infty} 2J_{2k+1}(\beta) \cos(2\pi(2k+1) f_m t)$$

5.12.2006

27

1. tyyppinen Besselin funktio



$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\beta \sin \lambda - n\lambda)} d\lambda$$

$$J_n(\beta) = -J_{-n}(\beta)$$

on differentiaaliyhtälön

$$x^2(\beta) \frac{d^2 y(\beta)}{d\beta^2} + x(\beta) \frac{dy(\beta)}{d\beta}$$

$$+ (x^2(\beta) - n^2) y(\beta) = 0$$

ratkaisu

5.12.2006

28

Vaihe- ja taajuusmodulaatio

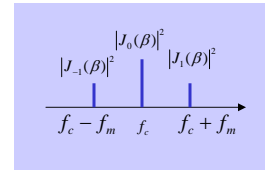
- Kantoaalto, perustaajuuden komponentti plus harmoniset yliaallot $f_c + kf_m$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \sin(2\pi(f_c + kf_m)t)$$

$$X(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \left(\delta(f - f_c - kf_m) e^{-j\frac{\pi}{2}} + \delta(f + f_c + kf_m) e^{+j\frac{\pi}{2}} \right)$$

- Jos $\beta \ll 1$ informaatio siirtyy pääasiassa kahdella taajuuskomponentilla

$$X(f) \approx \frac{1}{2} \sum_{k=-1}^1 J_k(\beta) \left(\delta(f - f_c - kf_m) e^{j\frac{\pi}{2}} + \delta(f + f_c + kf_m) e^{-j\frac{\pi}{2}} \right)$$



5.12.2006

29

Vaihe ja taajuusmodulaatio

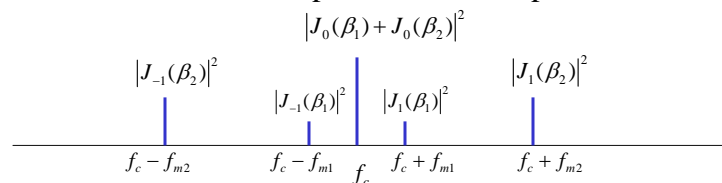
- Useita komponentteja (multi-tone modulation)

$$v(t) = A_1 \cos(2\pi f_{m1}t) + A_2 \cos(2\pi f_{m2}t)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_k(\beta_1) J_l(\beta_2) \sin(2\pi(f_c + kf_{m1} + lf_{m2})t)$$

$$X(f) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_k(\beta_1) J_l(\beta_2) \left(\delta(f - f_c - kf_{m1} - lf_{m2}) e^{j\frac{\pi}{2}} + \delta(f + f_c + kf_{m1} + lf_{m2}) e^{-j\frac{\pi}{2}} \right)$$

- Jos modulaatio indeksit pieniä, niin tehospektriksi tulee



Taajuuskaista levenee verrattuna amplitudimodulaatioon.

5.12.2006

30

Vaihe- ja taajuusmodulaatio

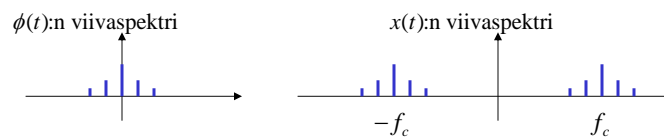
- Tarkastellaan periodista signaalia

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k e^{i2\pi f_m k t} \quad \text{Signaalin Fourier-sarja}$$

- Tällöin voidaan osoittaa, että (pitkähkö trigonometristen funktioiden manipulaatio)

$$x(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k e^{i2\pi f_m k t} e^{i2\pi f_c t} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k \cos(2\pi (f_c + f_m k) t)$$

Jokainen signaalin komponentti kuvautuu omalle taajuudelleen. Spektri vastaa DSB:tä.



5.12.2006

31

Vaihe- ja taajuusmodulaatio

Johtopäätös: Yleisessä tapauksessa FM ja PM modulaatio levittävät signaalin äärettömän suurelle taajuuskaistalle.

- Käytännön signaaleille taajuuskomponentit pienenevät nopeasti taajuuden kasvaessa. => Jos kaista valitaan riittävän suureksi, signaalin vääristymä suodatuksesta johtuen on pientä.

- Merkittävien taajuuskomponenttien määrä

$$M = \arg \max_k \{ |J_k(\beta)| > \varepsilon \} \quad 0.01 < \varepsilon < 0.1$$

- Kaistanleveys

$$B = 2Mf_m$$

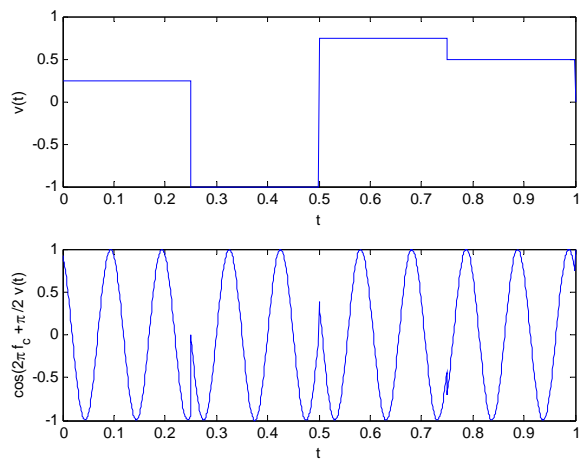
- FM modulaatio

$$\beta = \frac{A f_0}{f_m} \quad A \leq 1, f_m \leq 1 \quad M \approx \beta + 2 \quad B \approx 2 \left(\frac{A f_0}{f_m} + 2 \right) f_m \approx 2(f_0 + 2f_m)$$

5.12.2006

32

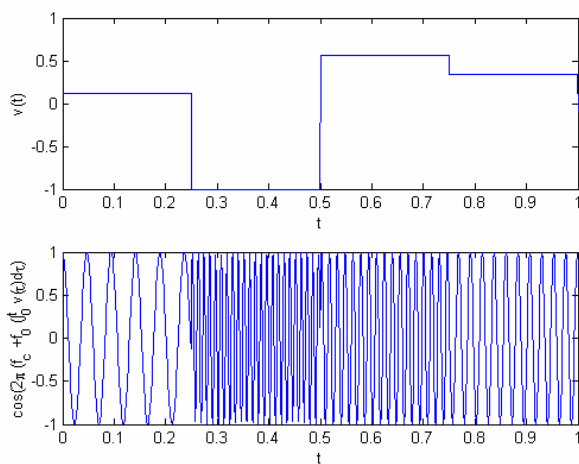
Vaihemodulaatio



5.12.2006

33

Taajuus modulaatio



5.12.2006

34

Vaihe- ja taajuus modulaatio

- Vastaanotto:

- FM muutetaan AM:ksi derivoimalla

$$x(t) = \cos(\phi_c(t))$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \left(\frac{d}{dt}\phi_c(t)\right) \sin(\phi_c(t)) = \underline{2\pi(f_c + f_0v(t))} \sin(\phi_c(t))$$

$$\phi_c(t) = 2\pi \left(f_c(t-t_0) + f_0 \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \right)$$

$$\frac{d}{dt}\phi_c(t) = 2\pi(f_c + f_0v(t)) \approx \frac{\phi_c(t) - \phi_c(t - \Delta t)}{\Delta t}, \quad \Delta t \ll 1$$

- Derivoitu FM moduloitu signaali voidaan nyt löytää verhoikäyrän havaitsijalla.

5.12.2006

35

Vaihe ja taajuus modulaatio

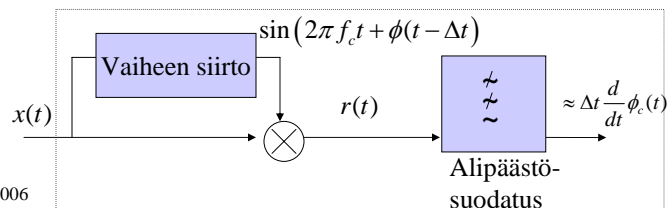
- Vaihe-eroon perustuva havaitseminen:

$$\phi_c(t) - \phi_c(t - \Delta t) \approx \Delta t \frac{d}{dt}\phi_c(t) = 2\pi(f_c + f_0v(t))\Delta t$$

$$r(t) = \underbrace{\cos(2\pi f_c t + \phi(t))}_{x(t)} \sin(2\pi f_c t + \phi(t - \Delta t))$$

$$= \frac{1}{2}(\sin(\phi(t) - \phi(t - \Delta t)) + \sin(4\pi f_c t + \phi(t) + \phi(t - \Delta t)))$$

$$\approx \phi(t) - \phi(t - \Delta t) + \sin(4\pi f_c t + \phi(t) + \phi(t - \Delta t))$$

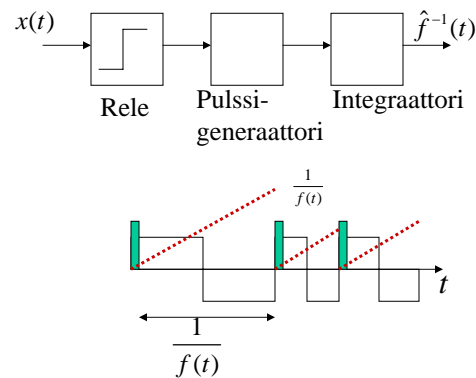


5.12.2006

36

Vaihe- ja taajuus modulaatio

- Taajuuteen perustuva havaitseminen: Signaalin taajuus voidaan estimoida sen perusteella kuinka monta kertaa se menee nollan kautta (zero crossing)



5.12.2006

37

Vaihemodulaatio ja kohina

- Vastaanotettu signaali, ennen havaitsemista

$$y(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_0 v(t)) + z(t)$$

$$z(t) = \text{Re} \left\{ \sqrt{n_I^2(t) + n_Q^2(t)} e^{i\theta(t)} e^{i2\pi f_c t} \right\} = A_z(t) \cos(2\pi f_c t + \theta(t))$$

$A_z(t)$ Reyleigh jakautunut

$\theta(t)$ Tasajakautunut

- Ekvivalentti alipäästösignaali

$$y_1(t) = A_c e^{i\phi(t)} + A_z(t) e^{i\theta(t)}$$

$$A_c A_z(t) \cos \phi(t) \cos \theta(t) - A_c A_z(t) \sin \phi(t) \sin \theta(t)$$

$$+ i A_c A_z(t) (\cos \phi(t) \sin \theta(t) + \sin \phi(t) \cos \theta(t)) = A_v(t) e^{i\phi_v(t)}$$

$$\phi_v(t) = \phi(t) + \arctan \left(\frac{\sin(\theta(t) - \phi(t))}{\frac{A_c}{A_z(t)} + \cos(\theta(t) - \phi(t))} \right)$$

5.12.2006

38

Vaihemodulaatio ja kohina

- Kantoaalto-kohina-suhde CNR (carrier-to-noise-ratio)

$$CNR_r = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt}{E\{|z(t)|^2\}} = \frac{\frac{A_c^2}{2}}{\frac{1}{2} N_0} = \frac{A_c^2}{N_0}$$

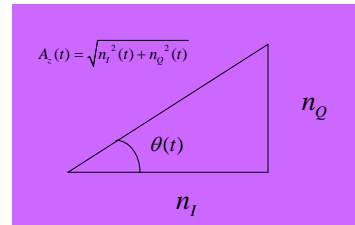
- CNR >> 1

$$\phi_v(t) = \phi(t) + \arctan\left(\frac{\sin(\theta(t) - \phi(t))}{\frac{A_c}{A_c(t)} + \cos(\theta(t) - \phi(t))}\right)$$

$$\approx \phi(t) + \frac{\sin(\theta(t) - \phi(t))}{\frac{A_c}{A_c(t)}} \quad \leftarrow \arctan(x) \approx x, \quad x \ll 1$$

$$\approx \phi(t) + \frac{A_c(t)}{A_c} \sin(\theta(t)) = \phi(t) + \frac{1}{A_c} n_Q(t)$$

$\theta(t) - \phi(t)$ on tasajakautunutta, joten $\sin(\theta(t) - \phi(t)) = \sin(\theta(t))$ omaa samat tilastolliset ominaisuudet



5.12.2006

39

Vaihemodulaatio ja kohina

- Signaali-kohina-suhde

$$\phi_v(t) \approx \phi(t) + \frac{1}{A_c} n_Q(t) = \phi_0 v(t) + \frac{1}{A_c} n_Q(t)$$

$$SNR_d \approx \frac{2(\phi_0 A_c)^2}{N_0} \quad \text{Kohina suodattuu.}$$

- CNR << 1

$$\phi_v(t) = \phi(t) + \arctan\left(\frac{\sin(\theta(t) - \phi(t))}{\frac{A_c}{A_c(t)} + \cos(\theta(t) - \phi(t))}\right)$$

$$\approx \phi(t) + \arctan(\tan(\theta(t) - \phi(t))) \approx \phi(t) + \theta(t)$$

**Vaihe on lähinnä kohinan määrittämää.
Signaali hukkuu kohinaan.**

5.12.2006

40

Digitaalinen modulaatio

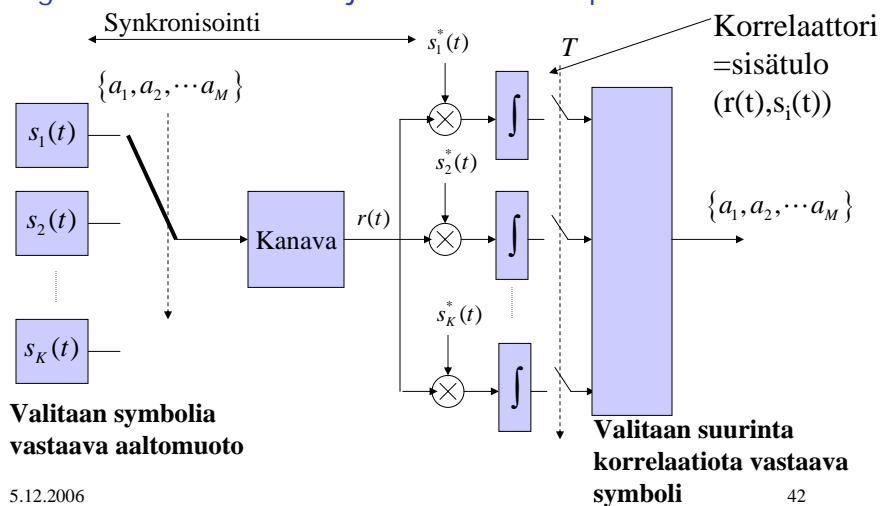
- Olkoon $\{a_n\}$ informaatio sekvenssi (bittijono)
- Olkoon $S = \{s_k(t)\}$, $|S| = K$ mahdollisten T :n pituisten aaltomuotojen (signaalien) joukko
- Tarkastellaan M :n bitin kuvaamista jatkuva-aikaiseksi signaaliksi eli modulointia.
 - $M = \log_2 K$ bitin symboli voidaan esittää aina yhdellä aalto muodolla. Tällöin numeronopeudeksi tulee $R = M/T$.
- Koherentti modulaatio: Modulaattori ohjaa suoraan signaalin vaihetta.
- Epäkoherentti modulaatio: Modulaattori ohjaa signaalin taajuutta.
- Koherentti vastaanotto: Vastaanotetun signaalin vaihe tunnetaan.
- Epäkoherentti vastaanotto: Signaalin vaihetta ei tunneta.

5.12.2006

41

Digitaalinen modulaatio

Digitaalisen moduloinnin ja demoduloinnin periaate



5.12.2006

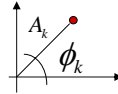
42

Digitaalinen modulaatio

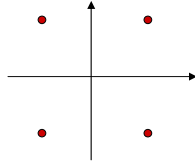
- Olkoon aaltomuodot muotoa

$$s_k(t) = A_k g(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_k) = \operatorname{Re}\{A_k e^{i\phi_k} g(t) e^{i2\pi f_c t}\}$$

Tällöin yksittäistä symboli voidaan esittää pisteenä (I,Q) –tasossa



- Modulointimenetelmän konstituatio on kaikki mahdolliset signaalit (I,Q) –tasossa.



5.12.2006

43

PAM-modulointi

PAM Pulse Amplitude Modulation

$$s_k(t) = A_k g(t) \cos(2\pi f_c t) = \operatorname{Re}\{A_k g(t) e^{i2\pi f_c t}\}$$

$$s_{-k}(t) = -s_k(t)$$

– $g(t)$ on kantafunktio, esim. pulssi $g(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$

– A_k kuvaa k :n symbolin aaltomuodon amplitudiksi

– Aaltomuodon energia

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^T |A_k g(t)|^2 dt = \frac{1}{2} A_k^2 E_g$$

5.12.2006

44

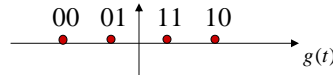
PAM-modulointi

- PAM moduloinnin signaali konstillaatio

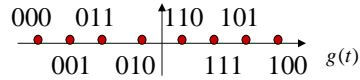
2. Tasoinen PAM (=BPSK)



4. Tasoinen PAM



8. Tasoinen PAM



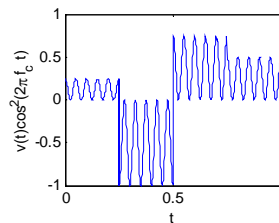
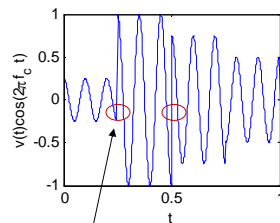
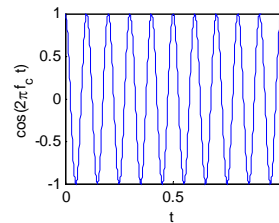
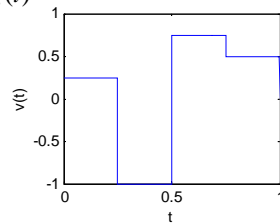
- Kohinan takia signaalimuotoja voidaan tulkita vastaanottimessa toisiksi. Bittivirhetodennäköisyyden minimoimiseksi vierekkäisten signaalien bittien tulisi poiketa toisistaan vain yhdellä bitillä (Gray encoding).

5.12.2006

45

PAM modulaatio

$$v(t) = A_k g(t)$$



Vaihe muuttuu 180°

5.12.2006

46

PSK-modulaatio

PSK Phase Shift Keying

$$s_k(t) = g(t) \cos\left(2\pi\left(f_c t + \frac{(k-1)}{K}\right)\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left\{g(t)e^{i2\pi\frac{(k-1)}{K}}e^{i2\pi f_c t}\right\}, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

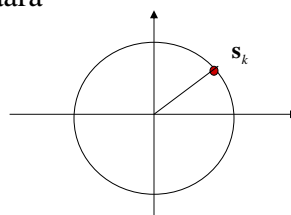
$$= g(t) \cos\left(2\pi\frac{(k-1)}{K}\right) \cos(2\pi f_c t) - g(t) \sin\left(2\pi\frac{(k-1)}{K}\right) \sin(2\pi f_c t)$$

I-haara

Q-haara

- Ekvivalentti alipäästösignaali

$$s_{I,k}(t) = g(t)e^{i2\pi\frac{(k-1)}{K}}$$



5.12.2006

47

PSK-modulaatio

- BPSK Binary PSK

$$s(t) = g(t) \cos\left(2\pi\left(f_c t + \frac{(k-1)}{2}\right)\right) = \cos(\pi(k-1))g(t) \cos(2\pi f_c t)$$

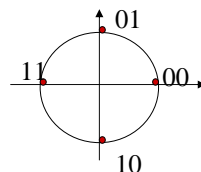
– Sama kuin kaksi tasoinene PSK



- QPSK Quadrature PSK

$$s(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}(k-1)\right)g(t) \cos(2\pi f_c t) - \sin\left(\frac{\pi}{2}(k-1)\right)g(t) \sin(2\pi f_c t)$$

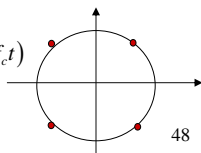
$k = 1, 2, 3, 4$



tai

$$s(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(2k-1)\right)g(t) \cos(2\pi f_c t) - \sin\left(\frac{\pi}{4}(2k-1)\right)g(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$k = 1, 2, 3, 4$

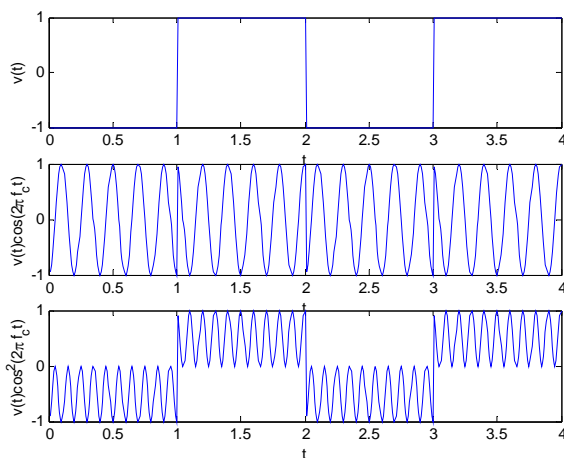


5.12.2006

48

PSK-modulaatio

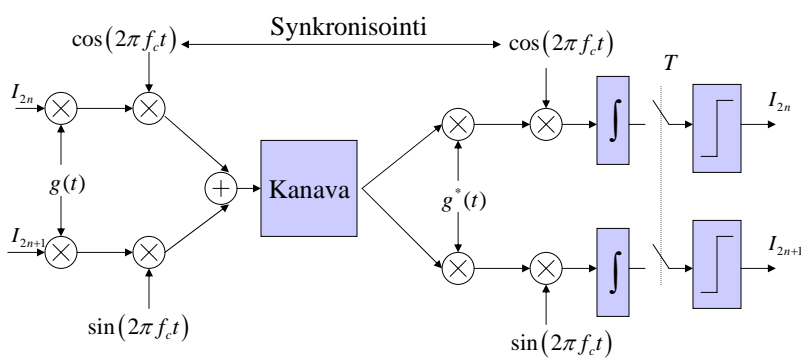
- BPSK



5.12.2006

49

QPSK



$$I_n = \begin{cases} -1 & a_n = 1 \\ 1 & a_n = 0 \end{cases}$$

$$s(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(2k-1)\right)g(t)\cos(2\pi f_c t) - \sin\left(\frac{\pi}{4}(2k-1)\right)\sin(2\pi f_c t)$$

$$= I_{2n}\cos(2\pi f_c t) + I_{2n+1}\sin(2\pi f_c t)$$

5.12.2006

50

QAM-modulaatio

QAM Quadrature Amplitude Modulation Neliöllinen QAM (M=16)

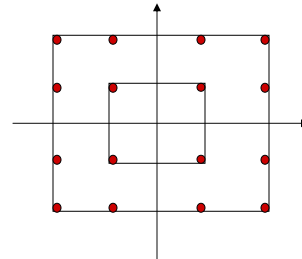
$$s_k(t) = A_{I,k} g(t) \cos(2\pi f_c t) - A_{Q,k} g(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$= V_k \cos(2\pi f_c t + \theta_k)$$

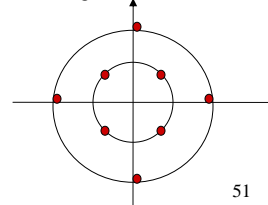
$$V_k = \sqrt{A_{I,k}^2 + A_{Q,k}^2}, \quad \theta_k = \arctan \frac{A_{Q,k}}{A_{I,k}}$$

- Ekvivalentti alipäästösignaali

$$s_{I,k}(t) = V_k e^{i\theta_k} g(t)$$



Yhdistetty PAM-PSK (M=8)



5.12.2006

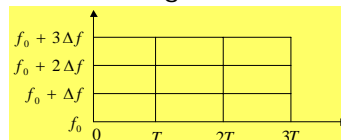
51

Multidimensionaaliset signaalit

- Vaihetta ja amplitudiamoduloimalla voidaan toteuttaa kaksi dimensiainen signaaliavaruus

$$s_k(t) = A_{I,k} \underbrace{g(t) \cos(2\pi f_c t)}_{g_1(t)} - A_{Q,k} \underbrace{g(t) \sin(2\pi f_c t)}_{g_2(t)}$$

- $g_1(t)$ ja $g_2(t)$ muodostavat ortogonaalisen kannan
- N dimensiainen signaaliavaruus voidaan toteuttaa N:llä ortogonaalilla funktiolla. Esim.
 - Jaetaan aika N:ään aikaväliin, joka ajanhetki lähetetään yksidimensionainen signaali (PAM/ BPSK)
 - Jaetaan taajuuskaista N:ään taajuuskaistaan ja lähetetään yksidimensionainen signaali kullakin taajuuskaistalla.



5.12.2006

52

Multidimensionaaliset signaalit

- Multidimensionaalisia signaaleja voidaan käyttää monikäyttö tekniikoiden (Multiple Access) toteuttamiseen.
- TDMA: Jaetaan aika N:ään aikaväliin, joka ajanhetki lähetetään yksittäiselle käyttäjälle.
- Ideaalinen CDMA: Valitaan N:n ortogonaalia kantafunktiota samalta taajuuskaistalta. Jokaisella käyttäjällä oma kantafunktio.
- FDMA: Valitaan N:n ortogonaalia kantafunktiota, siten että funktiot ovat eri taajuuskaistoilla.

5.12.2006

53

FSK-modulaatio

FSK Frequency shift keying

$$s_k(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos(2\pi(f_c + (k-1)\Delta f)t), \quad k=1,2,\dots,K, \quad 0 \leq t \leq T$$

- Ekvivalentti alipäästösignaali

$$s_{l,k}(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} g(t) e^{i2\pi(k-l)\Delta ft}$$

- Ristikorrelaatio tekijä (Cross correlation coefficient)

$$\rho_{l,kl} = \frac{\int_0^T s_{l,k}(t) s_{l,l}^*(t) dt}{\sqrt{\int_0^T s_{l,k}(t) s_{l,k}^*(t) dt} \sqrt{\int_0^T s_{l,l}(t) s_{l,l}^*(t) dt}} = \frac{2E}{2E} \int_0^T e^{i2\pi(k-l)\Delta ft} dt$$

$$= \text{sinc}((k-l)\Delta f T) e^{i2\pi(k-l)\Delta f T}$$

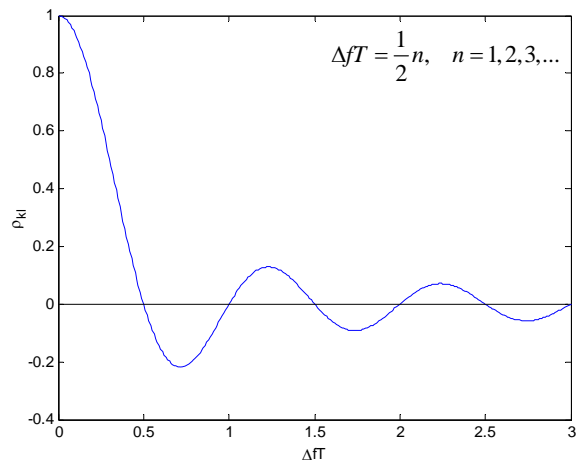
$$\rho_{kl} = \text{Re}\{\rho_{l,kl}\} = \frac{\sin(\pi(k-l)\Delta f T) \cos(\pi(k-l)\Delta f T)}{\pi(k-l)\Delta f T}$$

5.12.2006

54

FSK-modulaatio

- FSK:ssa kanavien välit Δf valittava siten, että eri aaltomuodot pysyvät ortogonaaleina.

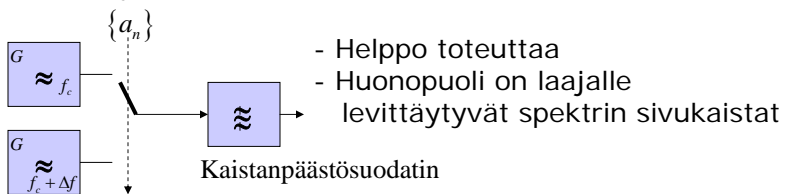


5.12.2006

55

FSK-modulaatio

- Kova avainnus: FSK toteutetaan kytkimellä ja eritaajuisilla oskillaattoreilla



- Pehmeä avainnus: FSK toteutetaan oskillaatorilla jonka taajuutta voidaan säätää.
 - Paremmat spektriominaisuudet kuin kovalla avainnuksella
 - Yleisesti käytössä

5.12.2006

56

Muistillinen modulaatio

- Bitti sekvenssiä ei moduloida sellaisenaan vaan se koodataan ennen modulointia, koska
 - halutaan muokata sen spektriä paremmin kanavaan sopivaksi.
 - koodatussa signaalissa tulee olla kyllin tason muutoksia, jotta vastaanottimen kellon vaatima ajoitus voitaisiin erottaa.
 - tai halutaan, että tason muutoksia on mahdollisimman vähän, jolloin tarvittava taajuuskaista pienenee.
 - Jos kanavassa on sarjassa kapasitanseja tai muuntajakytkentöjä, ei tasavirtakomponentti pääse läpi => Valitaan koodi siten, että tasavirtakomponenttia ei synny.
 - Kooderin ja modulaattorin toteutuksen tulee olla riittävän yksinkertaista.

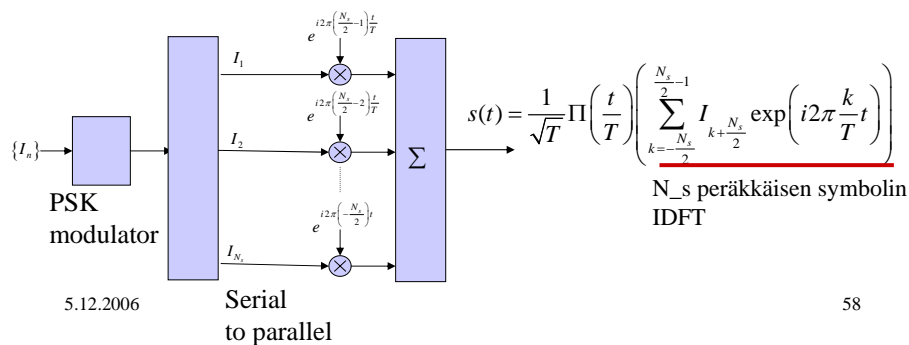
5.12.2006

57

OFDM

Orthogonal Frequency Division Multiplexing

- Symbolin pituus T on suhteellisen pitkä => Kaistanleveys on kapea
- N_s (parillinen) symbolia lähetetään rinnan siten, että kanta-aallon taajuuksudet ovat $1/T$ päässä toisistaan

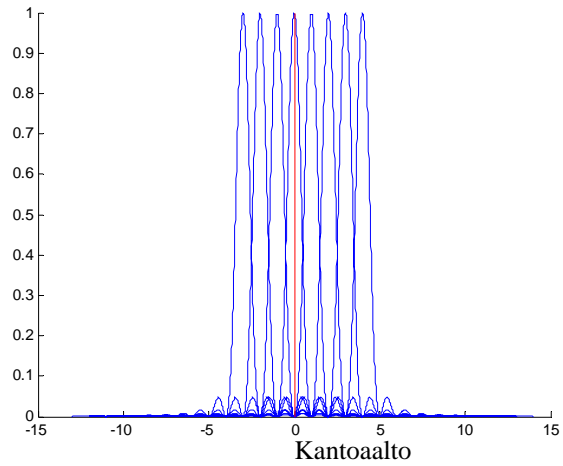


5.12.2006

58

OFDM

Spektritiheys kun $N_s = 8$

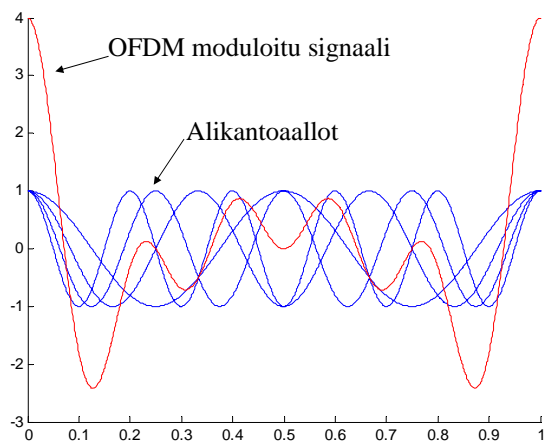


5.12.2006

59

OFDM

$N_s = 4$
 $f_c = 4 \text{ Hz}$



5.12.2006

60

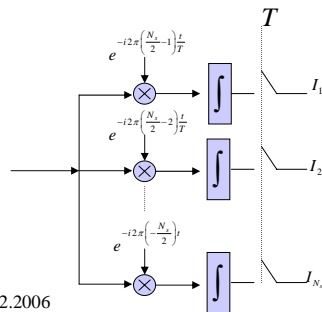
OFDM

- Alikanavat ovat keskenään ortogonaalisia

$$\left(\frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \exp\left(i2\pi \frac{k}{T} t\right) \middle| \frac{1}{\sqrt{T}} \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \exp\left(i2\pi \frac{l}{T} t\right) \right) = \frac{1}{T} \int_0^T \exp\left(i2\pi \frac{k-l}{T} t\right) dt, \quad k \neq l$$

$$= \frac{1}{i2\pi(k-l)} (\exp(i2\pi(k-l)) - 1) = 0$$

- Vastaanotin



5.12.2006

61

OFDM

- OFDM modulaattori voidaan toteuttaa käyttäen käännteistä nopeaa Fourier-muunnosta (IDFT) ja Digitaal-Analogia D/A muunninta.
- Vastaanotin voidaan toteuttaa näytteistuksen jälkeen käyttäen nopeaa Fourier-muunnosta (FFT)
- Digitaalinen signaalin käsittely on halpaa – erillisiä oskillaattoreita ei tarvita jokaista alikanavaa kohden.

5.12.2006

62

Johtokoodit

- Modulaatio koodi/Johtokoodi
 - NRZ (Non-return-to-zero): Amplitudi määräytyy lähetettävästä bitistä

$$A = \begin{cases} 1 & a_n = 1 \\ -1 & a_n = 0 \end{cases}$$
 - NRZI: Amplitudi muutos vain silloin kun 1 lähetetään (differential encoding)

$$A = \begin{cases} 1 & b_n = 1 & b_n = a_n \oplus b_{n-1} \\ -1 & b_n = 0 \end{cases}$$

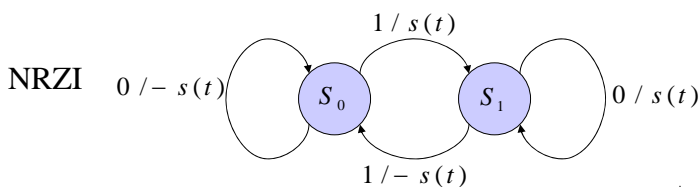
$1 \oplus 1 = 0$	$1 \oplus 0 = 1$
$0 \oplus 1 = 1$	$0 \oplus 0 = 0$
 - RZ (Return-to-zero): 1 kuvataan amplitudi muutokseksi, 0 vakio signaaliksi. Eli, yhden bitin esittämiseen käytetään kaksi symbolia joiden pituus on $1/2T$.
 - Miller koodi: Kuten RZ, mutta peräkkäiset 0:t kuvataan eri merkkisillä symboleilla
 - Manchester koodi: bitti kuvataan aina transitioksi: 1 on siirtymä $-1 \Rightarrow 1$ ja 0 on siirtymä $1 \Rightarrow -1$

5.12.2006

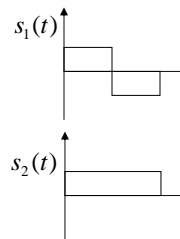
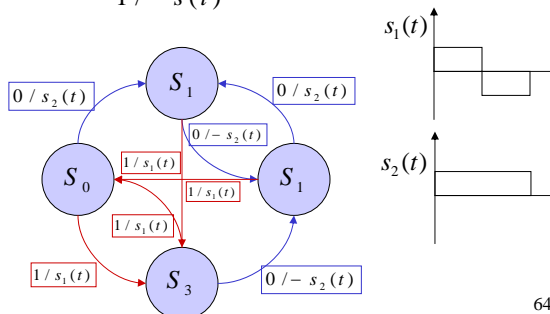
63

Johtokoodit

Tilakaaviot



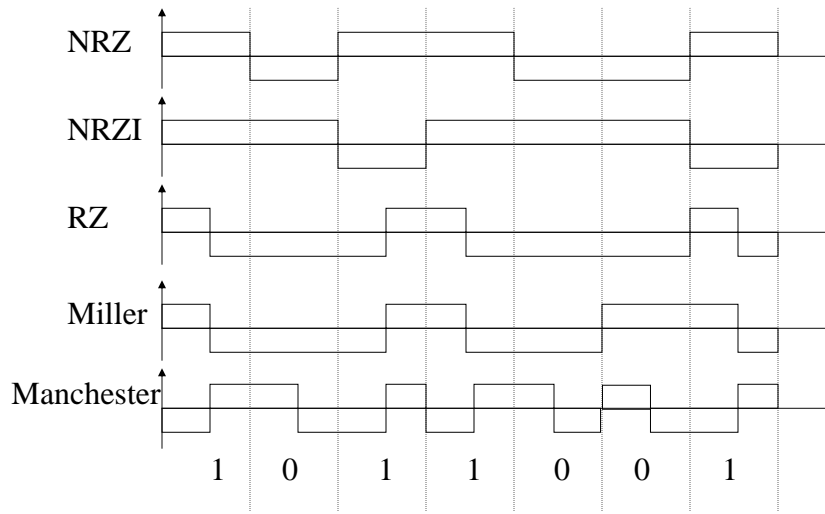
Miller koodaus



5.12.2006

64

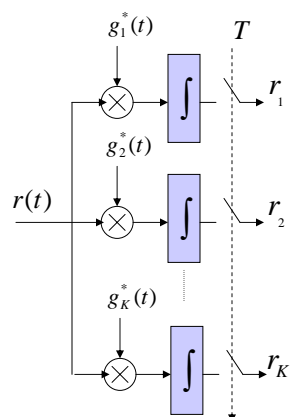
Johtokoodit



5.12.2006

65

Korrelaatio demodulaattori



- Korrelaattorin ulostulo

$$r_i = (r(t), g_i(t)) = \int_0^T r(t) g_i^*(t) dt = s_{ki} + n_i$$

- Signaali-kohinasuhde

$$SNR = \frac{s_{ki}^2}{E\{n_i^2\}} = 2 \frac{s_{ki}^2}{N_0}$$

- Jos

$$s_k(t) = \sqrt{E} g_k(t)$$

$$SNR = \frac{s_{kk}^2}{E\{n_i^2\}} = 2 \frac{E}{N_0}$$

Korrelaattori laskee vastaanotetun signaalin ja tunnettujen aaltomuotojen välisen sisätulon

5.12.2006

66

Optimaalinen päätössääntö

- Gaussinen kanava.

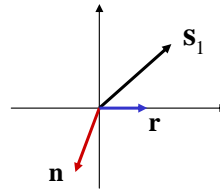
$$s_k(t) = \sum_{l=1}^K s_{kl} g_l(t) \text{ lähetetty signaali}$$

$$r_i = \int_0^T r(t) g_i^*(t) dt = \int_0^T (s_k(t) + n(t)) g_i^*(t) dt = s_{ki} + n_i \text{ vastaanotettu signaali}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{s}_k + \mathbf{n} \text{ Kanavan vektori malli}$$

- Ehdollinen jakauma

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_k) = \frac{1}{(\pi N_0)^{\frac{K}{2}}} e^{-\frac{\sum_{l=1}^K (r_l - s_{kl})^2}{N_0}}$$



5.12.2006

67

Optimaalinen päätössääntö

- MAP (Maximum a posteriori probability) päätössääntö: Tarkastellaan todennäköisyyttä, että $s_k(t)$ lähetettiin kun korrelaattorin ulostulo on $\mathbf{r} = (r_i)$.

$$\Pr(\mathbf{s}_k \text{ lähetettiin} | \mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_k) \Pr\{\mathbf{s}_k\}}{p(\mathbf{r})} \text{ Bayesin teoreema}$$

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_k) \text{ } \mathbf{r} \text{:n todennäköisyysjakauma ehdolla } s_k(t) \text{ lähetettiin.}$$

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^M p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_k) \Pr\{\mathbf{s}_k\} \text{ } \mathbf{r} \text{:n todennäköisyysjakauma}$$

$$\Pr\{\mathbf{s}_k\} \text{ } s_k \text{:n a priori todennäköisyys.}$$

- Aaltomuotojen apriori todennäköisyydet $\Pr\{\mathbf{s}_k\}$ riippuvat käytetystä (johto)koodaus menetelmästä. Jos symbolit yhtätodennäköisiä niin $\Pr\{\mathbf{s}_k\} = \frac{1}{M} \forall k$

5.12.2006

68

Optimaalinen päätössääntö

- Metriikka

$$\Pr(\mathbf{s}_k \text{ lähetettiin} | \mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_k) \Pr\{\mathbf{s}_k\}}{p(\mathbf{r})}$$

$$\ln \Pr(\mathbf{s}_k \text{ lähetettiin} | \mathbf{r}) = \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_k) = -\frac{K}{2} \ln(\pi N_0) - \frac{1}{N_0} \sum_{l=1}^K (r_l - s_{kl})^2 + \ln \Pr\{\mathbf{s}_k\} - \ln p(\mathbf{r})$$

Vain suhteellisella arvolla on väliä, joten ne osat jotka ovat kaikille samat voidaan unohtaa.

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k) = \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_k\|^2 = \sum_{l=1}^K (r_l - s_{kl})^2 \quad \text{Euklidinen etäisyys}$$

$$D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k) = -2\mathbf{r}^T \mathbf{s}_k + \|\mathbf{s}_k\|^2 \quad \text{Etäisyys metriikka}$$

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k) = 2 \int_0^T r(t) s_k^*(t) dt - E_k = 2\mathbf{r}^T \mathbf{s}_k - \|\mathbf{s}_k\|^2 \quad \text{Korrelaatio metriikka}$$

$$C'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k) = \int_0^T r(t) s_k^*(t) dt = \mathbf{r}^T \mathbf{s}_k$$

5.12.2006

69

Optimaalinen päätössääntö

- Oletetaan, että $s_k(t)$ lähetettiin.
- Virheellisen päätöksen todennäköisyys.

$$\Pr\{\text{virhe} | \mathbf{s}_k \text{ lähetettiin}\} = 1 - \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^M \Pr\{D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_k) > D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_l)\}$$

5.12.2006

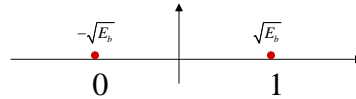
70

BPSK

- BPSK

$$s_1(t) = \sqrt{E_b} g(t)$$

$$s_2(t) = -\sqrt{E_b} g(t)$$



- Lähetettävä signaali

$$s(t) = \sqrt{E_b} g(t) I_n, I_n \in \{-1, 1\}$$

- Vastaanotettu signaali

$$r = \int_0^T r(t) g^*(t) dt = \int_0^T (s_k(t) + n(t)) g^*(t) dt = \begin{cases} \sqrt{E_b} + n & I_n = 1 \\ -\sqrt{E_b} + n & I_n = -1 \end{cases}$$

- Ehdolliset jakaumat

$$p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(r - \sqrt{E_b})^2}{N_0}} \quad p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{(r + \sqrt{E_b})^2}{N_0}}$$

5.12.2006

71

BPSK

- Oletetaan, että molemmat symbolit ovat yhtä todennäköisiä.

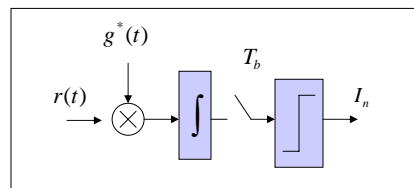
- Päätössääntö s_1

$$\ln \Pr(s_1 \text{ lähetettiin} | \mathbf{r}) > \ln \Pr(s_2 \text{ lähetettiin} | \mathbf{r})$$

$$\Rightarrow (r - \sqrt{E_b})^2 < (r + \sqrt{E_b})^2$$

- Päätösalueiden raja

$$(r - \sqrt{E_b})^2 = (r + \sqrt{E_b})^2 \Rightarrow r = 0$$



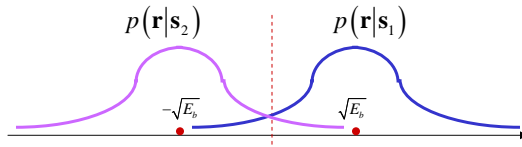
Lähetetty signaali voidaan päätellä vastaanotetun signaalin merkistä

5.12.2006

72

BPSK

- Virheen todennäköisyys



$$\Pr\{\text{virhe}\} = \Pr\{\text{virhe}|s_1 \text{ lähetettiin}\} \Pr\{s_1\} + \Pr\{\text{virhe}|s_2 \text{ lähetettiin}\} \Pr\{s_2\}$$

$$\Pr\{\text{virhe}|s_1 \text{ lähetettiin}\} = \Pr\{r \leq 0|s_1\}$$

$$\Pr\{\text{virhe}|s_2 \text{ lähetettiin}\} = \Pr\{r \geq 0|s_2\}$$

$$\Pr\{s_1\} = \Pr\{s_2\} = \frac{1}{2}$$

5.12.2006

73

BPSK

- Päätösvirhetodennäköisyys

$$\Pr\{r \geq 0|s_2\} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(r+\sqrt{E_b})^2}{N_0}} dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\sqrt{2E_b}}{\sqrt{N_0}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$\Pr\{r \leq 0|s_1\} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(r-\sqrt{E_b})^2}{N_0}} dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{\sqrt{2E_b}}{\sqrt{N_0}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\sqrt{2E_b}}{\sqrt{N_0}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_b = \Pr\{\text{virhe}\} = \Pr\{\text{virhe}|s_1 \text{ lähetettiin}\} \Pr\{s_1\} + \Pr\{\text{virhe}|s_2 \text{ lähetettiin}\} \Pr\{s_2\}$$

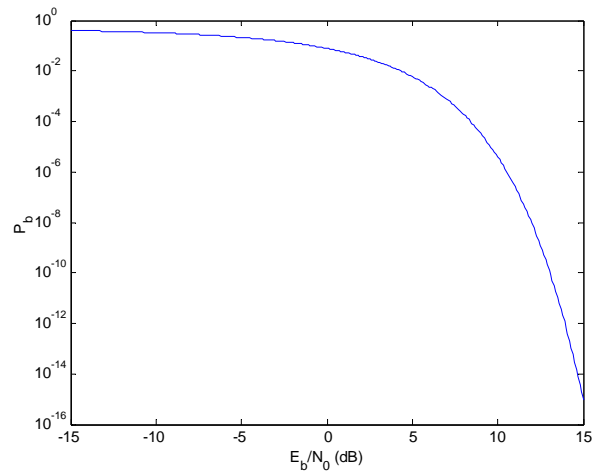
$$= \Pr\{r \geq 0|s_2\} \frac{1}{2} + \Pr\{r \leq 0|s_1\} \frac{1}{2} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right)$$

$$d_{12} = \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|$$

5.12.2006

74

BPSK



5.12.2006

75

Differential PSK

- BPSK modulaatio, paitsi että bitin sijasta lähetetään kahden peräkkäisen bitin erotus

$$\theta_n = \begin{cases} 0 & a_n \oplus a_{n-1} = 1 \\ \pi & a_n \oplus a_{n-1} = 0 \end{cases}$$

- Vastaanotettu ekvivalenttialipäätösignaali

$$r_{l,n} = \sqrt{E_s} e^{i(\theta_n - \phi)} + n_n$$

- Kahden perättäisen signaalin tulo riippuu vain kulman erosta, absoluuttista arvoa ei tarvitse estimoida => Epäkoherentti menetelmä.

$$r_{l,n} r_{l,n-1}^* = E_s e^{i(\theta_n - \theta_{n-1})} + \sqrt{E_s} \left(e^{i(\theta_n - \phi)} n_{n-1}^* + e^{-i(\theta_{n-1} - \phi)} n_n \right) + n_n n_{n-1}^*$$

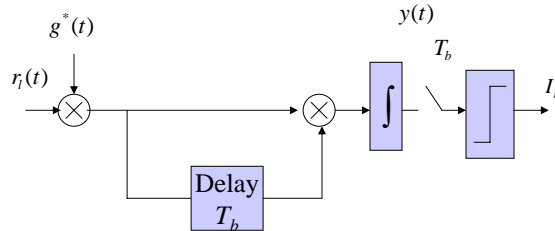
$$E \{ r_{l,n} r_{l,n-1}^* \} = E_s e^{i(\theta_n - \theta_{n-1})}$$

5.12.2006

76

DPSK

- Vastaanottimen rakenne



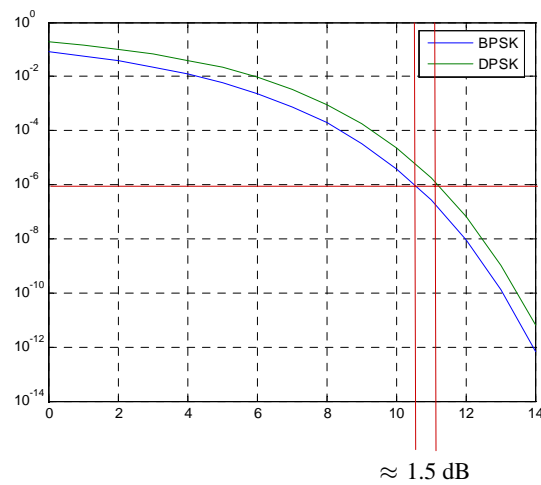
$$r_{i,n} r_{i,n-1}^* = E_s e^{i(\theta_n - \theta_{n-1})} = \begin{cases} E_s & \theta_n - \theta_{n-1} = 0 \\ -E_s & \theta_n - \theta_{n-1} = \pm \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{Kohinattomassa tapauksessa}$$

$$P_b = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right) \quad \text{Bittivirhetodennäköisyys on hivenen suurempi kuin BPSK:lla johtuen erilaisesta kohinasta}$$

5.12.2006

77

BPSK vs DPSK



5.12.2006

78

M-PSK

- Yleisin virhe on, että kohina muuttaa lähetetyn symbolin viereiseksi. Esim. 8-PSK:ssa 000 muuttuu symboliksi 001 tai 010.
- Yksittäisen virhetapahtuman todennäköisyyttä voidaan approksimoida BPSK:n virhetodennäköisyydellä ja koko symbolivirheen todennäköisyyttä kahden yleisimmän tapauksen perusteella

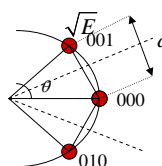
$$P_s \approx \Pr\{001|000\} + \Pr\{010|000\} \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)$$

$$d = 2\sqrt{E} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

- M-PSK:n tapauksessa

$$P_s \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{4E \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}{2N_0}}\right) = 2Q\left(\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) = 2Q\left(\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\sqrt{\frac{2KE_b}{N_0}}\right)$$

$$K = \log_2 M$$



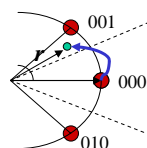
5.12.2006

79

M-PSK

- Bittivirhetodennäköisyys voidaan approksimoida symbolivirhetodennäköisyydestä: Symboli virhe todennäköisyys johtuu todennäköisimmin yksittäisen bitin virheestä.

$$P_b \approx \frac{P_s}{K} \approx \frac{2}{K} Q\left(\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\sqrt{\frac{2kE_b}{N_0}}\right)$$



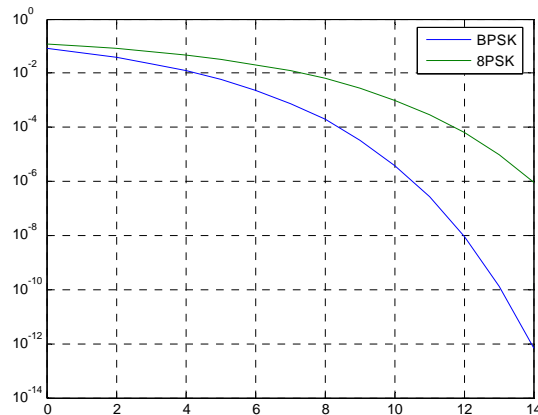
000 lähetettiin
001 vastaanotettiin

- Approksimaatiot pätevät sitä paremmin mitä suurempi signaali-kohina-suhde $\frac{E_b}{N_0}$ on.

5.12.2006

80

M-PSK



5.12.2006

81

Modulaatio menetelmien vertailua

- PAM, QAM, PSK: Kaistan leveys riippumaton symbolien lukumäärästä

$$\frac{R}{W} = \log_2(K) \rightarrow \infty, \quad K \rightarrow \infty$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{E_s}{N_0 \log_2 K} \Rightarrow E_s \rightarrow \infty, K \rightarrow \infty$$

Jos halutaan säilyttää tietty virhetodennäköisyystaso lähetysteho kasvaa rajatta

- Ortogonaaliset aaltomuodot (FSK): Tarvittava taajuuskaista kasvaa samassa suhteessa aaltumuotojen lukumäärän K kanssa

$$W = \frac{K}{2 \log_2 K} R \rightarrow \infty, \quad K \rightarrow \infty$$

$$\frac{E_b}{N_0} > 2 \ln 2, \quad M \rightarrow \infty$$

Mielivaltainen bittivirhetodennäköisyys saavutetaan äärellisellä energialla.

5.12.2006

82

Modulaatio menetelmien vertailua

- Kun $K=2$ ja 4 niin QAM ja PSK ovat suunnilleen yhtä hyviä bittivirhetodennäköisyyden mielessä
- Kun K kasvaa QAM:n ja PSK:n välinen bittivirhetodennäköisyyden suhde kasvaa. => Yleisesti QAM on parempi kuin PSK.

$$P_{av} = \frac{E_{av}}{T} = \frac{1}{6}(K^2 - 1)d^2 \frac{E_s}{T} \quad \text{QAM}$$

$$P_{av} = \frac{E_s}{T} \quad \text{QPSK}$$

- PSK on energian kulutuksen kannalta parempi

5.12.2006

83

Modulaatio menetelmien vertailua

- Koherentti vastaanotto
 - Kanavan aiheuttama vaiheen siirto pitää estimoida.
- Epäkoherentti vastaanotto
 - Vaiheensiirtoa ei tarvitse estimoida, mutta saman virhetodennäköisyyden saavuttamiseen tarvitaan suurempi lähetysteho.

5.12.2006

84

Modulaatio menetelmien vertailua

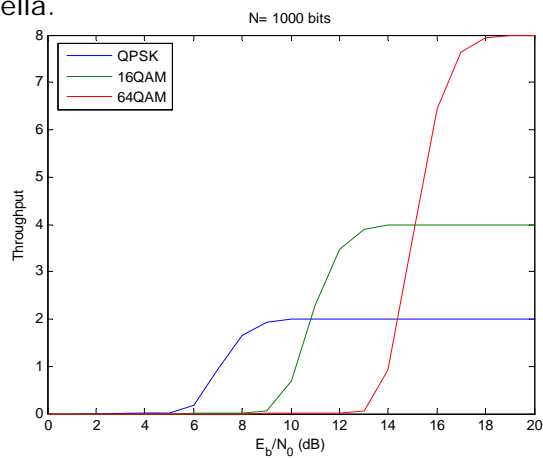
- Puhelinverkon modeemit:
 - Useita eri modulointitekniikoita nopeudesta riippuen
 - V22: QPSK
 - V90 / 56k: QAM
- IEEE 802.11b: QPSK
- WCDMA: OQPSK ja Hybrid PSK (\approx QPSK)
- HSDPA: OQPSK, 16QAM
- GSM & Bluetooth: Gaussian Minimum Shift Keying (GMSK)
- EDGE: $3\pi/8$ shifted PSK

5.12.2006

85

Modulaatio menetelmien vertailua

- Adaptiivinen modulaatio. Valitaan paras modulaatio menetelmä vastaanotetun signaali-kohina-suhteen perusteella.



5.12.2006

86