

Luento 4

- Erikoissignaalien Fourier-muunnokset
- Näytteenotto

14.11.2006

1

Fourier-muunnos

- **Fourier-muunnos**

$$V(f) = \mathcal{F}\{v(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \exp(-i2\pi ft) dt$$

- **Käänteismuunnos**

$$v(t) = \mathcal{F}^{-1}\{V(f)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} V(f) \exp(i2\pi ft) df$$

- Dirichlet'n ehdot Fourier muuntuvalle energiasignaaliille

I: Signaali on itseisesti integroitava

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)| dt < \infty$$

II: Signaalin maksimi- ja minimiarvot ovat äärellisiä jokaisella äärellisellä aikavälillä $t \in (a, b)$

$$\sup_{\{t_{i+1}, t_i\}} \left\{ \sum_i |s(t_{i+1}) - s(t_i)| \right\} < \infty, \quad a \leq t_i < t_{i+1} \leq b$$

III: Signaalin epäjatkuvuuskohtia on rajallinen määrä

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |s(t_0 + \varepsilon) - v(t_0 - \varepsilon)| \neq 0 \quad \text{äärellisessä määrässä pisteitä välillä } t \in (-\infty, \infty)$$

14.11.2006

2

Fourier-muunnos

- On olemassa joukko signaaleita, jotka eivät täytä Dirichlet'n ehtoja, mutta niille voidaan kuitenkin esittää Fourier-muunnos siten, että muunnoksen yleiset ominaisuudet ovat voimassa.
 - Esim.
 - Impulssifunktio
 - Tasavirta
 - Askel- ja signmum-funktiot
 - Sini-signaali
 - Näitä signaaleja kutsutaan **yleistetyiksi signaaleiksi**. Yleistetyt signaalit ovat **tehosignaaleja**

14.11.2006

3

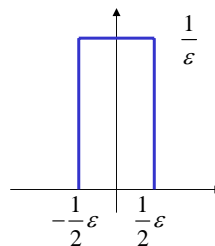
Impulssifunktio/Diracin delta-funktio

- Äärettömän kapea pulssi, jonka pinta-ala on 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

- Impulssifunktio $\delta(t)$ voidaan johtaa raja-arvona pulssista, jonka pituus on ε ja korkeus $1/\varepsilon$, kun $\varepsilon \rightarrow 0$.
- Suorakaidepulssin tapauksessa:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

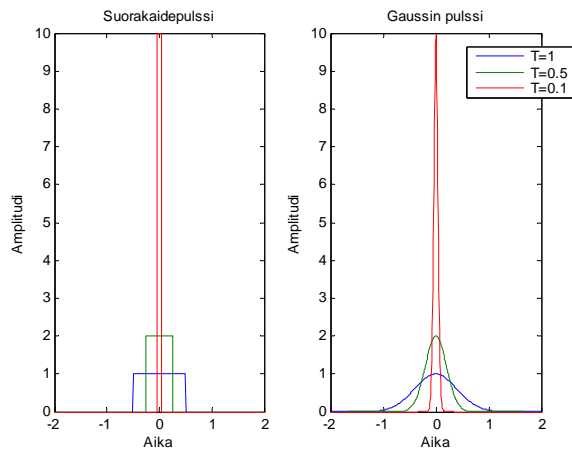


$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$

14.11.2006

4

Impulssifunktio



14.11.2006

5

Impulssifunktio

- Signaalin kertominen impulssifunktiolla

$$s(t)\delta(t-t_0) = s(t_0)\delta(t-t_0)$$

- Näytteenotto

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t)\delta(t-t_0)dt = s(t_0)$$

- Signaalin konvoluutio impulssifunktion kanssa (impulssivaste)

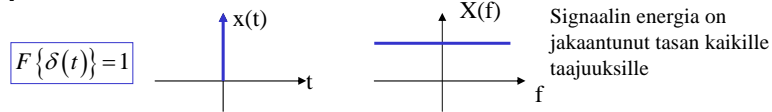
$$s(t) \otimes \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\delta(t-\tau)dt = s(t)$$

14.11.2006

6

Impulssifunktion Fourier muunnos

- Impulssifunktion Fourier-muunnos**



– Raja-arvona pulssin Fourier-muunnoksesta:

$$F\left\{\frac{1}{\varepsilon}\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\} = \text{sinc}(f\varepsilon)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F\left\{\frac{1}{\varepsilon}\Pi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{sinc}(f\varepsilon)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi f\varepsilon)}{\pi f\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi f \cos(\pi f\varepsilon)}{\pi f} = 1$$

l'Hôpital

$$F\left\{A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = AT\text{sinc}(fT)$$

– Raja-arvoja käyttäen suoraan F-muunnoksen määritelmästä:

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i2\pi ft} dt = \underbrace{e^{-i2\pi f \cdot 0}}_{=1} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt}_{=1} = 1$$

$$s(t)\delta(t-t_0) = s(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_0^0 \delta(t) dt = 1$$

14.11.2006

Impulssifunktion käänteismuunnos

- Impulssifunktion käänteismuunnos**



Todistus

$$F^{-1}\{\delta(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) e^{i2\pi ft} df = \underbrace{e^{i2\pi \cdot 0 \cdot t}}_{=1} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) df}_{=1} = 1$$

- DC-komponentin (vakion) Fourier-muunnos**

$$F\{A\} = A\delta(f)$$

- Taajuussiirros**

$$F^{-1}\{\delta(f-f_0)\} = e^{-i2\pi f_0 t}$$

Todistus

$$F^{-1}\{\delta(f-f_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f-f_0) e^{i2\pi ft} df = e^{-i2\pi f_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) df}_{=1} = e^{-i2\pi f_0 t}$$

14.11

8

Sini-signaalin Fourier-muunnos

- Sinimuotoinen signaali

$$y(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{A}{2} (e^{i2\pi f_0 t + i\phi} + e^{-i2\pi f_0 t - i\phi})$$

Eulerin kaavalla sinimuotoinen signaali voidaan kirjoittaa kahden osoittimen avulla, joita taajuustasossa vastaa taajuussiirros.

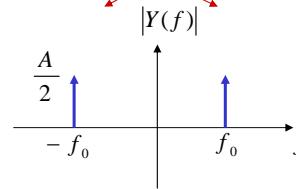
$$\sin(t) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$$

$$\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$$

$$F^{-1}\{\delta(f - f_0)\} = e^{-i2\pi f_0 t}$$

$$Y(f) = \frac{A}{2} (\delta(f - f_0) e^{i\phi} + \delta(f + f_0) e^{-i\phi})$$

Spektri:



14.11.2006

9

Jaksollisen signaalin Fourier-muunnos

- Jaksollinen signaali voidaan esittää Fourier-sarjan avulla

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \exp\left(i \frac{2\pi k}{T_0} t\right)$$

- Sovelletaan taajuussiirroksen Fourier-muunnosta

$$F\{v(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k F\left\{\exp\left(i \frac{2\pi k}{T_0} t\right)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k \delta\left(f - k \frac{1}{T_0}\right)$$

$$F\{e^{i2\pi f_0 t}\} = \delta(f - f_0)$$

Jaksollisen signaalin Fourier-muunnos saa nolasta poikkeavia arvoja ainoastaan harmonisilla taajuuksilla.

- Integraali spektritiheyden yli antaa signaalin keskimääräisen tehon

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(f) V^*(f) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v_k|^2 = P_v$$

14.11.2006

10

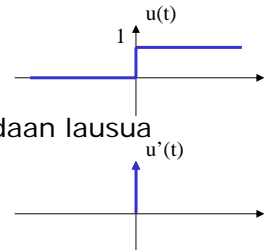
Epäjatkua-amplitudiset signaalit

- Askelfunktio $u(t)$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Epäjatkuvuuskohtan derivaatta voidaan lausua impulssifunktion avulla

$$\frac{d}{dt} u(t) = \delta(t)$$



14.11.2006

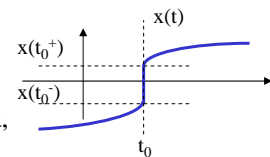
11

Epäjatkua-amplitudiset signaalit

- Epäjatkuvuuskohta ajanhetkellä t_0

$$\frac{d}{dt} x(t) = \xi'(t) + [x(t_0^+) - x(t_0^-)] \delta(t - t_0)$$

$\xi'(t)$ on signaalin jatkuvan termin derivaatta, joka täyttää Dirichlet'n ehdot



- Signaalin Fourier muunnos-saadään integrointikeinon avulla

$$x(t) = \int_{-\infty}^t (\xi'(\tau) + [x(t_0^+) - x(t_0^-)] \delta(\tau - t_0)) d\tau$$

$$F \left\{ \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{(i2\pi f)} S(f)$$

$$F \{ x(t) \} = \frac{F \{ \xi'(t) \} + (x(t_0^+) - x(t_0^-)) e^{-i2\pi f t_0}}{i2\pi f}$$

14.11.2006

12

Epäjatkuva-amplitudiset signaalit

- Monta epäjatkuvuuskohtaa

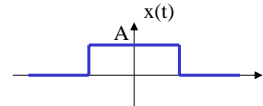
$$\frac{d}{dt}x(t) = \xi'(t) + \sum_k \Delta x(t_k) \delta(t - t_k)$$

$$\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$$

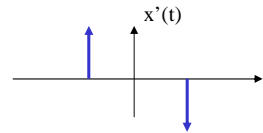
$$F\{x(t)\} = \frac{F\{\xi'(t)\} + \sum_k \Delta x(t_k) e^{-i2\pi f t_k}}{i2\pi f}$$

- Esimerkki

- Pulssi $x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 0 & |t| > \frac{1}{2}T \\ A & |t| \leq \frac{1}{2}T \end{cases}$



$$\frac{d}{dt}x(t) = A\delta\left(t + \frac{1}{2}T\right) - A\delta\left(t - \frac{1}{2}T\right)$$



$$F\{x(t)\} = A \frac{e^{i2\pi f \frac{1}{2}T} - e^{-i2\pi f \frac{1}{2}T}}{i2\pi f} = AT \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = AT \operatorname{sinc}(fT)$$

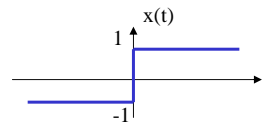
14.11.2006

13

Signum-funktio

- Signum-funktio

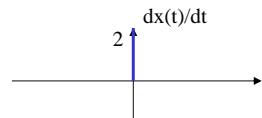
$$x(t) = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



- Ratkaistaan derivaatta

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\operatorname{sgn}(t)$$

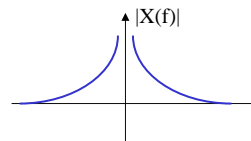
$$= [x(0^+) - x(0^-)]\delta(t) = [1 - (-1)]\delta(t) = 2\delta(t)$$



- Derivaatan Fourier-muunnos tunnetaan, joten x(t):n Fourier-muunnos saadaan integrointikeinolla

$$F\{x(t)\} = \frac{1}{i2\pi f} F\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\}$$

$$= \frac{1}{i2\pi f} F\{2\delta(t)\} = \frac{1}{i\pi f}$$



14.11.2006

14

Signum-funktio

- Tarkistetaan tulos käänteismuuntamalla se

$$F^{-1}\left\{\frac{1}{i\pi f}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{i\pi f} e^{i2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\pi ft)}{i\pi f} df + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{i\pi f} df$$

$$= -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\pi ft)}{\pi f} df + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{\pi f} df$$

$v(t) = \frac{\cos(2\pi ft)}{\pi f}$ Funktio on pariton, joten (pinta-ala) integraali sen yli = 0
 $v(-t) = -v(t)$

$$F^{-1}\left\{\frac{1}{i\pi f}\right\} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi ft)}{2\pi f} df = 2t \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2ft) df = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(f') df' & t \geq 0 \\ -\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(f') df' & t < 0 \end{cases}$$

$$= \text{sgn}(t) \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(f') df' = \text{sgn}(t)$$

14.11.2006

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(t) dt = 1$$

Muuttujan vaihto

$$f' = 2ft \Rightarrow df = \frac{1}{2t} df'$$

15

Yksikköaskelfunktio

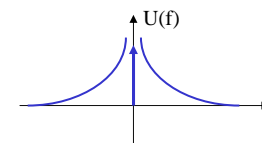
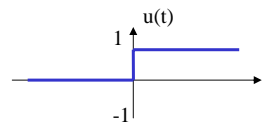
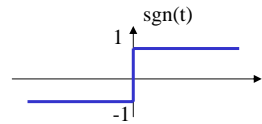
- Askelfunktio voidaan esittää tasavirtakomponentin ja signum-funktion avulla

$$u(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}(t)) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

- Fourier-muunnos

$$F\{u(t)\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} + F\left\{\frac{1}{2}\text{sgn}(t)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

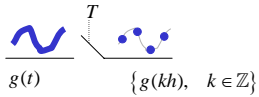


14.11.2006

16

Näytteenotto

- Tarkastellaan jatkuvaa signaalia $g(t)$ vain tiettyinä ajanhetkinä kh , $k \in \mathbb{Z}$



Nyquistin näytteenottoteoreema: Tarkastellaan kaistarajoitettua signaalia $g(t)$, jonka kaistanleveys on B . Jos näytteenotto taajuus $f_s = \frac{1}{h} \geq 2B$, niin $g(t)$ voidaan lausua näytteistetyn signaalin avulla $g(kh)$ avulla

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kh) \frac{\sin(\pi f_s (t - kh))}{\pi f_s (t - kh)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(kh) \text{sinc}(f_s (t - kh))$$

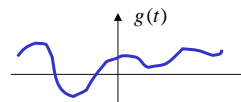
14.11.2006

17

Näytteenotto

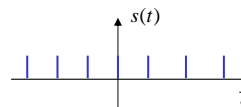
- Alkuperäinen signaali $g(t)$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

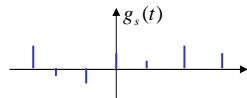


- Näytteistysignaali $s(t)$

$$s(t) = \begin{cases} 1 & t = kh \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$



- Näytteistetty signaali $g_s(t) = g(t)s(t)$



Fourier-muunnos

$$\begin{aligned} G_s(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)s(t)e^{-i2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kh) e^{-i2\pi f t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f kh} \end{aligned}$$

14.11.2006

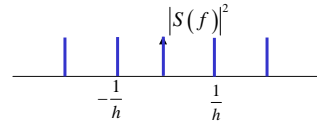
18

Näytteenotto

- Näytteistysignaali on periodinen, joten se voidaan lausua Fourier-sarjana

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \exp\left(i \frac{2\pi k}{h} t\right)$$

$$s_k = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} s(t) \exp\left(-i \frac{2\pi k}{h} t\right) dt = \frac{1}{h}$$



- Nyt näytteistetty signaali voidaan kirjoittaa muotoon

$$g_s(t) = g(t)s(t) = g(t) \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i \frac{2\pi k}{h} t}$$

- Fourier-muunnos

$$G_s(f) = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i \frac{2\pi k}{h} t} e^{-i 2\pi f t} dt = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i 2\pi \left(f - \frac{k}{h}\right) t} dt = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(f - \frac{k}{h}\right)$$

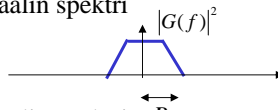
- Poissonin summakaava

$$14.11.2006 \quad h \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i 2\pi f k h} = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(f - \frac{k}{h}\right)$$

19

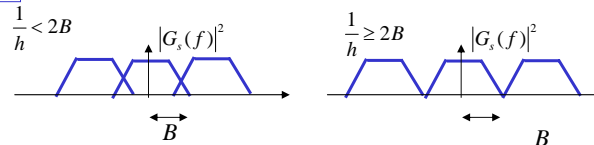
Näytteenotto

- Alkuperäisen signaalin spektri



- Näytteistetyn signaalin spektri

$$G_s(f) = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(f - \frac{k}{h}\right)$$



- Jos $\frac{1}{h} \geq 2B$, niin alkuperäinen signaali voidaan palauttaa näytteistetyistä:

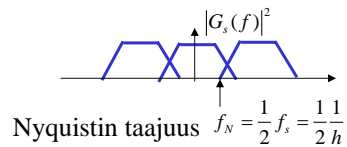
$$G(f) = \begin{cases} hG_s(f) & |f| \leq B \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$

14.11.2006

20

Näytteenotto

- Jos $\frac{1}{h} < 2B$, niin Nyquistin taajuutta korkeammat taajuudet laskostuvat alemmille eikä alkuperäistä signaalia voida enään palauttaa.



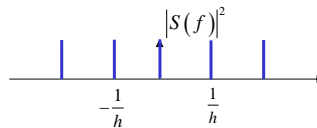
14.11.2006

21

Näytteenotto

- Näytteistysignaali $s(t)$

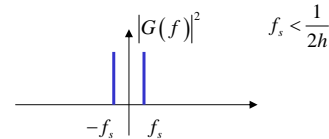
$$s(t) = \begin{cases} 1 & t = kh \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$



- Näytteistettävä signaali

$$g(t) = \cos(2\pi f_s t)$$

$$G(f) = \frac{1}{2} (\delta(f - f_s) + \delta(f + f_s))$$

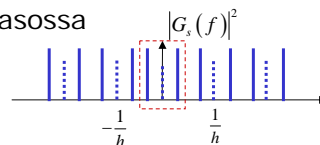


- Näytteistetty signaali

$$g_s(t) = \cos(2\pi f_s t) s(t)$$

Kertolasku aikatasossa

=> Kovoluutio taajuustasossa



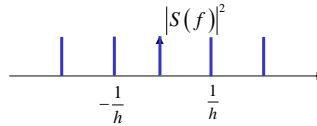
14.11.2006

22

Näytteenotto

- Näytteistyssignaali $s(t)$

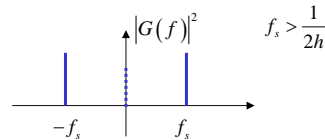
$$s(t) = \begin{cases} 1 & t = kh \\ 0 & \text{muutoin} \end{cases}$$



- Näytteistettävä signaali

$$g(t) = \cos(2\pi f_s t)$$

$$G(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_s) + \delta(f + f_s))$$

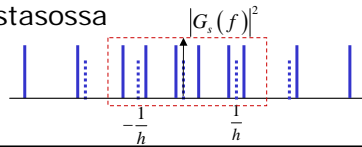


- Näytteistetty signaali

$$g_s(t) = \cos(2\pi f_s t) s(t)$$

Kertolasku aikatasossa

=> Kovoluutio taajuustasossa

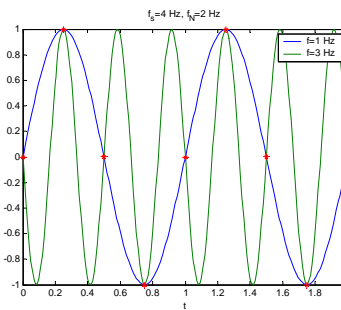
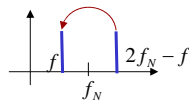


14.11.2006

23

Näytteenotto

- Aliasointi ilmiö: Yli Nyquistin taajuuden oleva signaali, näyttää näytteistykseen jälkeen alemman taajuuden signaalilta.



14.11.2006

24