

Luento 6

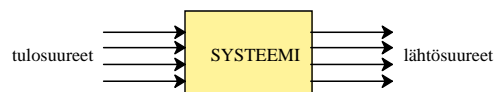
- Järjestelmän (systeemin) käsite ja luokitukset
- Lineaarinen aika invariantti järjestelmä
 - Impulssivaste
 - Siirtofunktio
 - Stabiilisuus
 - Taajuusvaste

21.11.2006

1

Järjestelmät

- Järjestelmä / Systeemi / Prosessi on objekti, joka määrittää relaatiot signaalijoukon välillä.
- Järjestelmän signaalit jaetaan usein tulosuureisiin ja lähtösuureisiin
- Tulosignaalit ovat järjestelmästä riippumattomia
 - Lähtösignaalit sisältävät järjestelmän tuottamaa informaatiota.
 - Tyypillisesti järjestelmä reagoi lähtösignaaleihin ja tuottaa niiden perusteella lähtösignaalit. Tällöin tulo- ja lähtösignaalien välillä vallitsee kausaliiteettisuhde.

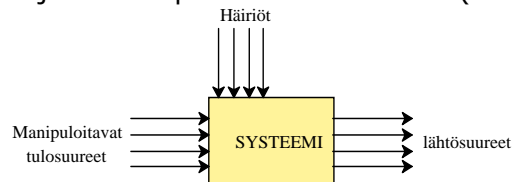


21.11.2006

2

Järjestelmät

- Järjestelmän tulosuuret jaetaan usein manipuloitaviin suureisiin ja ei-manipuloitaviin suureisiin (häiriöt)



- Järjestelmiä voidaan luokitella niiden tulo- ja lähtösuureiden määrien mukaan
 - SISO Single Input-Single Output
 - MISO Multiple Input - Single Output
 - SIMO Single Input - Multiple Output
 - MIMO Multiple Input - Multiple Output

21.11.2006

3

Järjestelmät

- Järjestelmä voidaan ajatella operaattoriksi $F(\cdot)$, joka kuvaa tulosuureen lähtösuureeksi. (vrt. matriisilla \mathbf{A} kertominen on kuvaus vektorilta \mathbf{x} vektorille $\mathbf{y}=\mathbf{Ax}$)
- Esimerkkejä järjestelmä-operaattoreista:

$$F(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)dt \quad \text{Konvoluutiointegraali}$$

$$F(x(t)) = x(t) \cos(2\pi f_c t) \quad \text{Lineaarinen modulaatio}$$

21.11.2006

4

Järjestelmät

- Prosessi on **kausallinen**, jos vasteen $y(t)$:n ratkaisemiseksi ajanhetkellä t ei tarvita herätteen tulevia arvoja $u(\tau)$, $\tau \geq t$
- **Jatkuva-aikainen prosessi**: Sekä tulo- että lähtösuureet ovat jatkuva-aikaisia signaaleja
 $y(t)=F(u(t))$
- **Diskreetti-aikainen prosessi**: Sekä tulo- että lähtösuureet ovat diskreettiaikaisia signaaleja
 $y(k)=F(u(k))$

21.11.2006

5

Järjestelmät

- **Lineaarinen järjestelmä**: Järjestelmän toiminta ei riipu herätteen amplitudista ja vaiheesta. Sen kuvaamiseen riittää lineaarinen operaattori F :
 $F(ax(t)+bu(t))=aF(x(t))+bF(u(t))$
Esim. Passiivisista komponenteista koostuva sähköpiiri
- **Epälineaarinen järjestelmä**: Järjestelmän generoima vaste riippuu herätteen amplitudista ja tai vaiheesta
 $\exists a \in \mathbb{C}: F(ax(t)) \neq aF(x(t))$
Esim. Tehovahvistin

21.11.2006

6

Järjestelmät

- **Deterministinen järjestelmä**
 - Jos järjestelmän tila tunnetaan tietyssä ajanhetkenä voidaan sen vaste ennustaa tarkasti tunnetulle herätteelle.
Esim. Elektroninen tai mekaaninen järjestelmä
 - **Aika invariantti järjestelmä:** Järjestelmän toiminta ei riipu ajasta.
 - **Aijan suhteen muuttuva järjestelmä:** Järjestelmän toiminta muuttuu ajan funktiona. Sen vaste siis riippuu siitä minä ajanhetkenä heräte järjestelmään syötetään.
- **Stokastinen satunnainen järjestelmä / prosessi**
 - Vaikka järjestelmän tila tietyssä ajanhetkenä tunnettaisiin, ei sen vastetta tunnetulle herätteelle voida ennustaa vaan se on satunnainen.
Esim. Radiokanava
 - **Stationäärinen stokastinen prosessi:** Prosessin tilastolliset ominaisuudet eivät riipu ajasta.
 - **Epästationäärinen prosessi:** Prosessin tilastolliset ominaisuudet vaihtelevat ajan mukaan.

21.11.2006

7

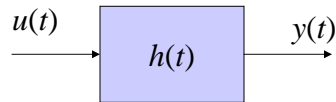
Stabiilisuus

- Deterministinen järjestelmä on BIBO (bounded input – bounded output) **stabiili**, jos amplitudirajoitetun herätteen vaste on amplitudirajoitettu
$$|x(t)| < \infty \Rightarrow |F(x(t))| < \infty \quad \forall t$$
- Jos on olemassa $|x(t)| < \infty$ siten, että $|F(x(t))| \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$, mutta amplitudi rajoitetun sini-muotoisen signaalin vaste on amplitudirajoitettu sini-muotoinen signaali
$$x(t) = A \cos(2\pi ft + \phi), \quad |A| < \infty \Rightarrow |F(x(t))| < \infty \quad \forall t$$
järjestelmää kutsutaan **marginäälisti stabiiliksi**.
- Muutoin järjestelmää kutsutaan **epästabiiliksi**.

21.11.2006

8

Lineaarinen aikainvariantti järjestelmä



- Jatkuva-aikaisen LTI-järjestelmän toimintaa kuvaa lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) = -a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) - \dots - a_n y(t) + b_0 \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \dots + b_m u(t)$$

jossa n on järjestelmän *kertaluku*

- Jos $m \leq n$, niin järjestelmä on *aito (proper)*: Vaste ei riipu herätteen derivaatasta d/dt $u(t)$
- Jos $m < n$, niin järjestelmä on *vahvasti aito (strictly proper)*: Tulosuuren u arvo ajanhetkellä t , $u(t)$, ei vaikuta lähtösuureen y arvoon ajanhetkellä t , $y(t)$.

21.11.2006

9

LTI-järjestelmät

- Yleinen esitystapa

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^k u(t)}{dt^k}$$

- Jos $m < n$, niin määritellään $b_k = 0$, $k = m+1, m+2, \dots, n$
- Aikaderivaattaa merkitään usein pisteellä

$$\dot{v}(t) = \frac{d}{dt} v(t)$$

$$\ddot{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2} v(t)$$

$$v^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} v(t)$$

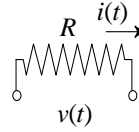
21.11.2006

10

Sähköpiirien peruskomponentit

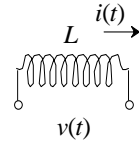
- Vastus (resistanssi)

$$v(t) = Ri(t)$$



- Kela (induktanssi)

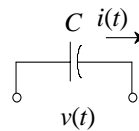
$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$



- Kondensaattori (kapasitanssi)

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{i_0}^t i(t) dt$$



21.11.2006

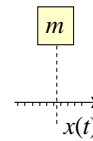
11

Mekaanisten järjestelmien peruskomponentit

Etenevä liike:

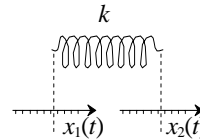
- Massakappale (inertia)

$$F_m(t) = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$



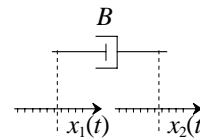
- Jousi

$$F_k(t) = k \Delta x(t) = k(x_1(t) - x_2(t))$$



- Vaimennin

$$F_b(t) = B \frac{d\Delta x(t)}{dt} = B \left(\frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt} \right)$$



21.11.2006

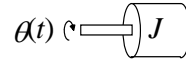
12

Mekaanisten järjestelmien peruskomponentit

Pyörivä liike:

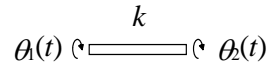
- Hitausmomentti

$$T_J(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$



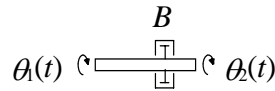
- Vääntöjousi

$$T_k(t) = k\Delta\theta(t) = k(\theta_1(t) - \theta_2(t))$$



- Vääntövaimennin

$$T_b(t) = B \frac{d\Delta\theta(t)}{dt} = B \left(\frac{d\theta_1(t)}{dt} - \frac{d\theta_2(t)}{dt} \right)$$



21.11.2006

13

Virtausjärjestelmien peruskomponentit

- Läpivirtaussäiliö

$$\frac{dV(t)}{dt} = F_1(t) - F_2(t)$$

- Ideaalisekoitin

$$\frac{dV(t)C_2(t)}{dt} = F_1(t)C_1(t) - F_2(t)C_2(t)$$

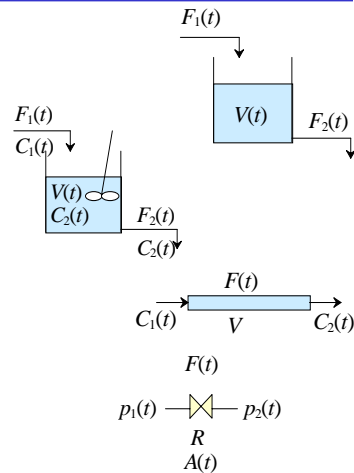
- Putkiviive

$$C_2(t) = C_1(t - T_d(t)) = C_1 \left(t - \frac{V}{F(t)} \right)$$

- Virtaus aukon läpi

$$F(t) = A(t)R\sqrt{\Delta p(t)} = A(t)R\sqrt{p_1(t) - p_2(t)}$$

Tämä on esimerkki epälineaarista komponentista

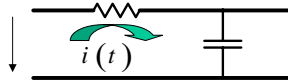


21.11.2006

14

Esimerkki 1

- Jännite $x(t)$ on tulosuure ja jännite $y(t)$ lähtösuure



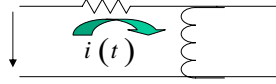
(a)

$$\begin{cases} i(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \\ x(t) = Ri(t) + y(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i(t) = \frac{x(t) - y(t)}{R} \\ \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} y(t) + \frac{1}{RC} x(t)$$

Vahvasti aito järjestelmä



(b)

$$\begin{cases} y(t) = L \frac{di(t)}{dt} \\ x(t) = Ri(t) + y(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i(t) = \frac{x(t) - y(t)}{R} \\ y(t) = L \frac{di(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{L}{R} \left(\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right)$$

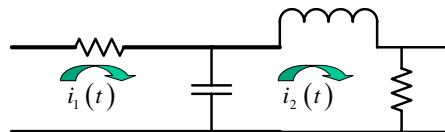
$$\Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = -\frac{R}{L} y(t) + \frac{dx(t)}{dt}$$

Aito järjestelmä

15

Esimerkki 2

- Jännite $x(t)$ on tulosuure ja jännite $y(t)$ lähtösuure



$$x(t) = Ri_1(t) + \frac{1}{C} \int [i_1(t) - i_2(t)] dt \Rightarrow -\frac{dx(t)}{dt} + R \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{i_1(t) - i_2(t)}{C} = 0$$

$$x(t) = Ri_1(t) + L \frac{di_2(t)}{dt} + y(t) = 0, \quad y(t) = i_2(t)R$$

- Järjestelmää kuvaa nyt 2. asteen differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{dy(t)}{dt} + \frac{2}{LC} y(t) = \frac{1}{LC} x(t)$$

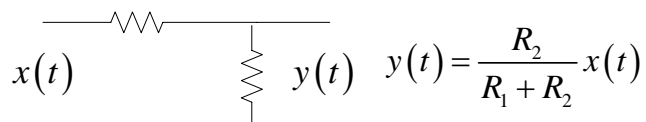
21.11.2006

16

x(t)

LTI-järjestelmät

- Sähköpiiriä kuvaavien differentiaaliyhtälöiden asteluku viittaa niissä esiintyvien varstoelementtien (kondensaattori ja kela) lukumäärään.
- Jos piirissä ei ole varstoelementtejä, sitä kutsutaan muistittomaksi.
- Esimerkki muistittomasta piiristä:



21.11.2006

17

Laplace-muunnos

- Signaali on **kausallinen**, jos $v(t)=0$, kun $t<0$.
- Kausaalisen signaalin *Fourier-muunnos*

$$V(f) = \mathcal{F}\{v(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} v(t) \exp(-i2\pi ft) dt$$

- Kausaalisen signaalin *Laplace-muunnos*

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} v(t) \exp(-st) dt \quad s = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$$

- Jos Laplace muunnos konvergoituu alueessa $\text{Re}\{s\} \geq 0$, saadaan siitä Fourier muunnos valitsemalla $s=i2\pi f$.

21.11.2006

18

Laplace-muunnos

- Määritelmä: ($f(t)$ on ajan funktio ja $F(s)$ on sitä vastaava Laplace-tason esitys)

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{i2\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(s)e^{st} ds$$

- Jos raja-arvot ovat olemassa, niin niille pätee
 - Loppuarvoteoreema $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
 - Alkuarvoteoreema $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
- Laplace-aulukot on esitetty eri lähteissä hieman erilaisina (yleensä joko niin, että ajan funktiot on helppo Laplace-muuntaa tai niin, että Laplace-tason esitys voidaan käänteismuuntaa helposti).

21.11.2006

19

Laplace-teoreemoja

| Laplace-muunnos | Ajan funktio | |
|--|--|----|
| $F(s)$ | $f(t)$ | T1 |
| $C_1F_1(s) + C_2F_2(s)$ | $C_1f_1(t) + C_2f_2(t)$ | T2 |
| $F(s+a)$ | $e^{-at}f(t)$ | T3 |
| $e^{-as}F(s)$ | $\begin{cases} 0, & t \leq a \\ f(t-a), & t > a \end{cases}$ | T4 |
| $\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$ | $f(at)$ | T5 |
| $-\frac{d}{ds}F(s)$ | $f(t)t$ | T6 |

21.11.2006

20

Laplace-teoreemoja

| Laplace-muunnos | Ajan funktio | |
|---|--------------------------------------|-----|
| $\int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$ | $f(t) \frac{1}{t}$ | T7 |
| $F_1(s)F_2(s)$ | $\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ | T8 |
| $sF(s) - f(0)$ | $\dot{f}(t)$ | T9 |
| $s^2F(s) - (sf(0) + \dot{f}(0))$ | $\ddot{f}(t)$ | T10 |
| $s^n F(s) - (s^{n-1}f(0) + s^{n-2}\dot{f}(0) + \dots + f^{(n-1)}(0))$ | $f^{(n)}(t)$ | T11 |
| $\frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) \Big _{t=0}$ | $\int_0^t f(\tau) d\tau$ | T12 |

21.11.2006

21

Laplace-muunnospareja

| Laplace-muunnos | Ajan funktio | | Laplace-muunnos | Ajan funktio | |
|-------------------------|----------------------------|----|---------------------------|---|-----|
| 1 | $\delta(t)$ | M1 | $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$ | $\frac{1}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})$ | M9 |
| $\frac{1}{s}$ | 1 | M2 | $\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$ | $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ab(b-a)}(ae^{-bt} - be^{-at})$ | M10 |
| $\frac{1}{s^2}$ | t | M3 | $\frac{a}{s^2+a^2}$ | $\sin(at)$ | M11 |
| $\frac{1}{s^{n+1}}$ | $\frac{t^n}{n!}$ | M4 | $\frac{s}{s^2+a^2}$ | $\cos(at)$ | M12 |
| $\frac{1}{s+a}$ | e^{-at} | M5 | $\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$ | $e^{-bt} \sin(at)$ | M13 |
| $\frac{1}{(s+a)^2}$ | te^{-at} | M6 | $\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$ | $e^{-bt} \cos(at)$ | M14 |
| $\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$ | $\frac{t^n e^{-at}}{n!}$ | M7 | $\frac{s+a}{s+b}$ | $\delta(t) + (a-b)e^{-bt}$ | M15 |
| $\frac{1}{s(s+a)}$ | $\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$ | M8 | | | |

21.11.2006

22

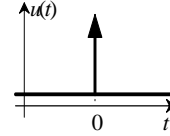
Deterministiset testifunktiot

- Systemin herätteenä $u(t)$ käytetään usein seuraavia signaaleja

- Yksikköimpulssifunktio (Diracin deltafunktio)

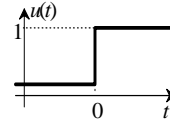
$$u_\delta(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty; & t = 0_+ \\ 0; & \text{muulloin} \end{cases} \quad \int \delta(t) dt = 1$$

$$U_\delta(s) = \Delta(s) = 1$$



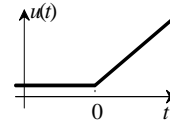
- Yksikköaskelfunktio

$$u_s(t) = \begin{cases} 0; & t \leq 0 \\ 1; & t > 0 \end{cases} \quad U_s(s) = \frac{1}{s}$$



- Yksikköpengerfunktio

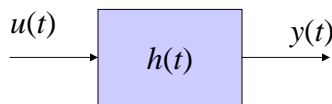
$$u_r(t) = \begin{cases} 0; & t \leq 0 \\ t; & t > 0 \end{cases} \quad U_r(s) = \frac{1}{s^2}$$



21.11.2006

23

LTI-järjestelmät



- Tarkastellaan lineaarista aikainvarianttia järjestelmää

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \dots + b_0 u(t), n \geq m$$

- Oletetaan, että järjestelmän alkuarvot ovat nolliä:

$$y^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} y(t) = 0 \text{ kun } t \leq 0$$

$$u^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} u(t) = 0 \text{ kun } t \leq 0$$

21.11.2006

24

LTI-järjestelmät

- Derivaatan Laplace-muunnos

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^k}{dt^k}v(t)\right\} = s^k V(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} y^{(k)}(0)$$

- LTI-järjestelmän Laplace muunnos

$$L\left\{\frac{d^n}{dt^n}y(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k}{dt^k}y(t)\right\} = L\left\{\sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k}{dt^k}u(t)\right\}$$
$$\Rightarrow \left(s^n + \sum_{l=0}^{n-1} a_l s^l\right)Y(s) = \sum_{k=0}^m b_k s^k U(s)$$

- Siirtofunktio

$$H(s) \triangleq \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{s^n + \sum_{l=0}^{n-1} a_l s^l}$$

21.11.2006

25

Impulssivaste

- LTI-järjestelmälle pätee yleisesti

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

- Käytetään herätteenä impulssia $u(t) = \delta(t)$.

$$U(s) = L\{\delta(t)\} = 1$$

$$Y(s) = H(s)U(s) = H(s)$$

$H(s)$ on Impulssivasteen Laplace muunnos.

- **Impulssivaste (painofunktio)** $h(t)$ saadaan käänteismuunnoksena:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$$

Laplace muunnos löytyy vaikka järjestelmä olisi epästabiili.

21.11.2006

26

Impulssivaste

- Lineaarisen järjestelmän siirtofunktio voidaan esittää kahden polynomin $M(s)$ ja $N(s)$ avulla

$$H(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{(s-z_1)^{M_1}(s-z_2)^{M_2}\dots(s-z_m)^{M_m}}{(s-p_1)^{N_1}(s-p_2)^{N_2}\dots(s-p_N)^{N_n}}$$

- Polynomin $M(s)$ nollakohdat $M(z_k)=0$ ovat nimeltään **nollia** (zero)
 - M_k on nollan z_k asteluku
 - $M_1+M_2+\dots+M_z=m$
- Polynomin $N(s)$ nollakohdat $N(p_k)=0$ ovat nimeltään **nollia** (pole)
 - N_k on navan p_k asteluku
 - $N_1+N_2+\dots+N_n=n$
 - Yhtälö $N(s)=0$ on nimeltään **karakteristinen yhtälö**

21.11.2006

27

Osamurtokehitemä

- Osamurtokehitemä siirtofunktiolle $H(s)$:

$$\begin{aligned} H(s) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \frac{C_{ij}}{(s-s_i)^j} \\ &= \frac{C_{11}}{(s-p_1)} + \frac{C_{12}}{(s-p_1)^2} + \dots + \frac{C_{1N_1}}{(s-p_1)^{N_1}} \\ &\quad + \frac{C_{21}}{(s-p_2)} + \frac{C_{22}}{(s-p_2)^2} + \dots + \frac{C_{2N_2}}{(s-p_2)^{N_2}} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{C_{n1}}{(s-p_N)} + \frac{C_{n2}}{(s-p_N)^2} + \dots + \frac{C_{nN_n}}{(s-p_N)^{N_n}} \end{aligned}$$

- Kertoimet

$$C_{ij} = \left[\frac{1}{(N_i-j)!} \cdot \frac{d^{N_i-j}}{ds^{N_i-j}} \left((z-p_i)^{N_i} \frac{M(s)}{N(s)} \right) \right]_{s=p_i}$$

21.11.2006

28

Impulssivaste

- LTI-järjestelmän impulssivaste voidaan kirjoittaa muotoon

$$H(s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \frac{C_{ij}}{(s-p_i)^j}$$

- Käänteismuunnos saadaan soveltamalla kaavaa (M7)

$$L\left\{\frac{t^n e^{-at}}{n!}\right\} = \frac{1}{(s+a)^{n+1}}$$

jolloin impulssivasteeksi saadaan

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1}\{H(s)\} = L\left\{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \frac{C_{ij}}{(s-p_i)^j}\right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \frac{C_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{p_i t} \end{aligned}$$

21.11.2006

29

Stabiilisuus

- LTI-järjestelmälle pätee

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

- Oletetaan, että herätesignaali $u(t)$ on amplitudirajoitettu $|u(t)| \leq M < \infty$
Vaste $y(t)$ on amplitudirajoitettu ja järjestelmä on stabiili, jos

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| |u(t-\tau)| d\tau \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Toisin sanoen, järjestelmä on stabiili, mikäli impulssivaste $h(t)$ on itseisesti integroitava

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

21.11.2006

30

Stabiilisuus

- LTI-järjestelmän impulssivaste on muotoa

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \frac{C_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{p_i t}$$

missä navat p_k ovat kompleksilukuja

- Jos $\text{Re}\{p_k\} < 0$, niin

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N_i} \frac{C_{ij}}{(j-1)!} t^{j-1} e^{p_i t} \rightarrow 0$$

kun $t \rightarrow \infty$

ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

- Jos impulssivaste on stabiili, sille löytyy myös Fouriermuunnos $H(f)$

21.11.2006

31

Navat

- Navat saadaan ratkaistua karakteristisesta yhtälöstä

$$N(s) = (s - p_1)^{N_1} (s - p_2)^{N_2} \dots (s - p_N)^{N_n} = 0$$

$$s = p_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

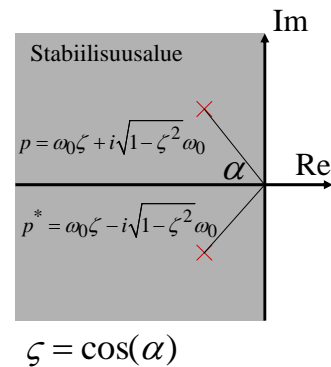
- Realin järjestelmälle $h(t) \in \mathbb{R}$ navat esiintyvät kompleksikonjugaattipareina

$$N(s) = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

$$s = \begin{cases} \zeta\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} & \zeta < 1 \text{ alivaimenettu} \\ \zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2-1} & \zeta \geq 1 \text{ ylivaimenettu} \end{cases}$$

ζ vaimennuskertoin
 ω_0 ominaistajuus

21.11.2006



32

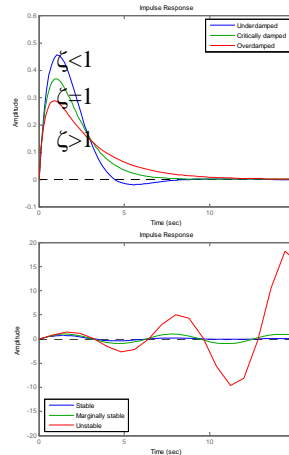
Navat

- Kompleksin napaparin vaikutus impulssivasteeseen

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2}$$

- Resonanssitaajuus $\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$

$\zeta \geq 1$ **stabiili, ei värähtele**
 $\zeta < 1$ **stabiili, värähtelee**
 $\zeta = 0$ **marginaalisesti stabiili, värähtelee, ei vaimene**
 $-1 \leq \zeta < 0$ **epästabiili, värähtelee**
 $\zeta \leq -1$ **epästabiili, ei värähtele**



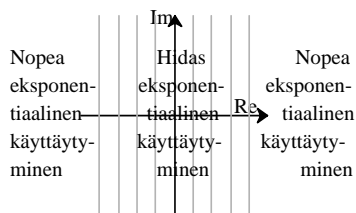
21.11.2006

33

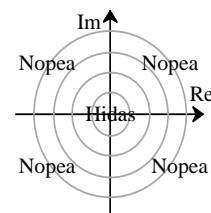
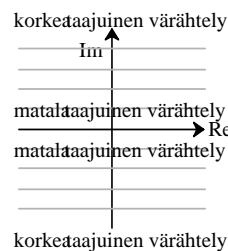
Perustuu kurssin AS-74.2111 Analoginen säätö luentomateriaaliin

Navat

- Etäisyys imaginääriakselista kuvaa eksponentiaalista käyttäytymistä (mitä kauempana imaginääriakselista ollaan sitä nopeammin impulssivaste saavuttaa loppuarvonsa (vasemmassa puolitasossa) tai karkaa äärettömyyteen (oikeassa puolitasossa).
- Etäisyys reaaliakselista kuvaa värähtelyn taajuutta (mitä kauempana reaaliakselista ollaan sitä suurempi taajuus).
- Järjestelmä on sitä nopeampi mitä kauempana sen navat ovat origosta



21.11.2006



34

LTI-järjestelmät

- Jos järjestelmä on stabiili, niin $h(t)$:n ja $y(t)$ Fourier muunnos tunnetaan ($y(t)$ on energiasignaali).
- Fourier-muuntuvan signaalin $y(t)$ derivaatta voidaan lausua $Y(f)$:n avulla:

$$F \left\{ \frac{d^k}{dt^k} y(t) \right\} = (i2\pi f)^k Y(f)$$

- Oletetaan, että heräte on Fourier-muuntuva

$$F \left\{ \frac{d^k}{dt^k} U(t) \right\} = (i2\pi f)^k U(f)$$

21.11.2006

35

LTI-järjestelmän Fourier muunnos

- Fourier muunnetaan alkuperäinen differentiaaliyhtälö

$$F \left\{ \frac{d^n}{dt^n} y(t) \right\} + a_{n-1} F \left\{ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) \right\} + \dots + a_0 F \{ y(t) \} = \\ b_m F \left\{ \frac{d^m}{dt^m} u(t) \right\} + b_{m-1} F \left\{ \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) \right\} + \dots + F \{ b_0 u(t) \}$$

- Muunnokseksi tulee

$$\left((i2\pi f)^n + \sum_{l=0}^{n-1} a_l (i2\pi f)^l \right) Y(f) = \sum_{k=0}^m b_k (i2\pi f)^k U(f)$$

- Suhdetta $Y(f)/U(f)$ kutsutaan järjestelmän **siirtofunktioksi**

$$H(f) \triangleq \frac{Y(f)}{U(f)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (i2\pi f)^k}{(i2\pi f)^n + \sum_{l=0}^{n-1} a_l (i2\pi f)^l}$$

21.11.2006

36

Esimerkki 5

- Tarkastellaan esimerkin 2 sähköpiiriä

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC} \right) \frac{dy(t)}{dt} + \frac{2}{LC} y(t) = \frac{1}{LC} x(t)$$

$$R=1, C=1, L=1$$

- Ratkaistaan siirtofunktio

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$(s^2 + 2s + 2)Y(s) = X(s)$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)}$$

21.11.2006

37

Esimerkki 5

- Navat

$$N(s) = (s^2 + 2s + 2) = (s - p_1)(s - p_2) = 0$$

$$s = \begin{cases} -1+i & = p_1 \\ -1-i & = p_2 \end{cases}$$

- Re{p_k} < 0, joten järjestelmä on stabiili.
- Osamurtokehitemmä

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)} = \frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2}$$

$$= \frac{As - p_2A + Bs - p_1B}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$s^1: A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$21.11.2006 \quad s^0: -p_2A - p_1B = (1+i)A + (1-i)(-A) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2i} \quad 38$$

Esimerkki 5

- Siirtofunktioksi saadaan

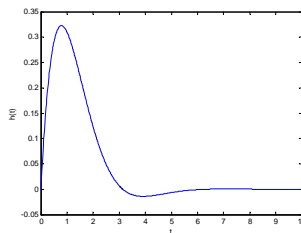
$$H(s) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s+1-i} + \frac{-1}{s+1+i} \right)$$

$$L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

- Käänteismuunnos antaa

$$h(t) = \frac{1}{2i} \left(e^{-(1-i)t} - e^{-(1+i)t} \right) = e^{-t} \sin(t)$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$



21.11.2006

39

Perustuu kurssin AS-74.2111 Analoginen säätö luentomateriaaliin

Stabiilisuustestit

- Jos tunnetaan systeemin navat (nimittäjäpolynomien nollakohdat), niin stabiilisuus on helppo todeta.
 - Juuret voidaan määrittää numeerisesta polynomista iteratiivisilla laskentarutiineilla (kuten komennot `eig`, `roots` tai `pole` MATLABissa).
 - Esim. polynomille
$$s^3 + 2s^2 + 4s + 10$$

```
roots([1 2 4 10])
ans =      -2.2236
          0.1118 + 2.1177i
          0.1118 - 2.1177i
```
 - Jos jokin polynomien kertoimista on nolla tai negatiivinen, niin polynomilla on vähintään yksi juuri imaginääriakselilla tai oikeassa puolitasossa.

21.11.2006

40

Routhin kaavio

- Symboliseen laskentaa soveltuu Routhin kaavio:

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

| | | | | | | | |
|-----------|----------|----------|----------|----------|---|---|---|
| s^n | a_0 | a_2 | a_4 | a_6 | a_8 | \dots | Determinantti $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ |
| s^{n-1} | a_1 | a_3 | a_5 | a_7 | a_9 | \dots | |
| s^{n-2} | b_0 | b_2 | b_4 | b_6 | b_8 | \dots | |
| s^{n-3} | b_1 | b_3 | b_5 | b_7 | b_9 | \dots | |
| s^{n-4} | c_0 | c_2 | c_4 | \dots | $b_0 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}$ | $b_2 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}$ | $b_4 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}, \dots$ |
| s^{n-5} | c_1 | c_3 | c_5 | \dots | $b_1 = \frac{-1}{b_0} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}$ | $b_3 = \frac{-1}{b_0} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_0 & b_4 \end{vmatrix}$ | $b_5 = \frac{-1}{b_0} \begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_0 & b_6 \end{vmatrix}, \dots$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots |
| s^1 | z_0 | z_2 | z_4 | z_6 | z_8 | z_{10} | \vdots |
| s^0 | z_1 | z_3 | z_5 | z_7 | z_9 | z_{11} | \vdots |

$z_1 = a_n$

21.11.2006

41

Routhin kaavio

- Routhin kaavion ensimmäisessä sarakkeessa olevien merkinvaihtojen lukumäärä on samalla myös polynomin oikeassa puolitasossa olevien juurien lukumäärä.
- Jos systeemin karakteristinen polynomi sijoitetaan Routhin kaavioon, niin *systemi on stabiili, jos ensimmäisessä sarakkeessa ei ole ainoatakaan merkinvaihtoa.*
- Jos kaaviota muodostettaessa sen ensimmäiseen sarakkeeseen tulee nolla, niin sen tilalle kaavioon sijoitetaan pieni positiivinen luku ε ja jatketaan kaavion muodostamista. Lopullisesta kaaviosta voidaan laskea merkinvaihdot tutkimalla ε :sta riippuvien termien raja-arvot, kun $\varepsilon \rightarrow 0$.
- Mikäli kaavioon muodostuu koko rivi nollia, niin välittömästi nollariviä ylemmästä rivistä voidaan muodostaa polynomi, jolla alkuperäinen polynomi on jaollinen.

21.11.2006

42

Esimerkit: Routhin kaavio

- Polynomit:

$$s^3 + 2s^2 + 4s + 10$$

| | | |
|-------|----|----|
| s^3 | 1 | 4 |
| s^2 | 2 | 10 |
| s^1 | -1 | |
| s^0 | 10 | |

Kaksi merkinvaihtoa $2 \rightarrow -1$
ja $-1 \rightarrow 10$
eli kaksi juurta oikeassa
puolitasossa

$$s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 2$$

| | | | |
|-------|------|---|---|
| s^4 | 1 | 6 | 2 |
| s^3 | 4 | 4 | |
| s^2 | 5 | 2 | |
| s^1 | 12/5 | | |
| s^0 | 2 | | |

Ei merkinvaihtoja ensimmäisessä
sarakeessa
eli ei juuria oikeassa
puolitasossa

21.11.2006

43

Esimerkit: Routhin kaavio

- Polynomi: $s^3 + s^2 + 2s + 2$

| | | |
|-------|---|---|
| s^3 | 1 | 2 |
| s^2 | 1 | 2 |
| s^1 | 0 | 0 |
| s^0 | | |

Saadaan nollarivi, jolloin ylemmältä riviltä saadaan
polynomi $s^2 + 2$ jolla alkuperäinen polynomi on
jaollinen.

Lasketaan tämän polynomin derivaatta s :n suhteen
ja sijoitetaan se kaavioon ... ja jatketaan

$$\frac{d}{ds}(s^2 + 2) = 2s$$

| | | |
|-------|---|---|
| s^3 | 1 | 2 |
| s^2 | 1 | 2 |
| s^1 | 2 | 0 |
| s^0 | 2 | |

21.11.2006

Ei merkinvaihtoja, joten ei juuria oikeassa puolitasossa

Esimerkit: Routhin kaavio

- Polynomi:

$$s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 12s + 12$$

| | | | |
|-------|--------------------------------------|----|----|
| s^4 | 1 | 4 | 12 |
| s^3 | 3 | 12 | |
| s^2 | $0 \rightarrow \varepsilon$ | 12 | |
| s^1 | $(12\varepsilon - 36) / \varepsilon$ | | |
| s^0 | 12 | | |

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{12\varepsilon - 36}{\varepsilon} \right\} = -\infty$$

Ensimmäiseen sarakkeeseen tulee nolla, jolloin korvataan se pienellä positiivisella luvulla ε ja jatketaan kaavion muodostamista

| | | | |
|-------|-----------|----|----|
| s^4 | 1 | 4 | 12 |
| s^3 | 3 | 12 | |
| s^2 | 0 | 12 | |
| s^1 | $-\infty$ | | |
| s^0 | 12 | | |

kaksi merkinvaihtoa $0 \rightarrow -\infty$ ja $-\infty \rightarrow 12$
 \Rightarrow kaksi juurta oikeassa puolitasossa

21.11.2006

45

Lohkodiagrammi

- Tarkastellaan n dimensioista lineaarista järjestelmää

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^n b_k \frac{d^k u(t)}{dt^k}$$

- Integroidaan molemmat puolet

$$\begin{aligned} a_n y(t) + a_{n-1} \int y(t) dt + a_{n-1} \int \int y(t) dt dt + \dots + a_0 \int \int \dots \int y(t) dt \dots dt \\ = b_n x(t) + b_1 \int x(t) dt + b_{n-1} \int \int x(t) dt dt + \dots + b_0 \int \int \dots \int x(t) dt \dots dt \end{aligned}$$

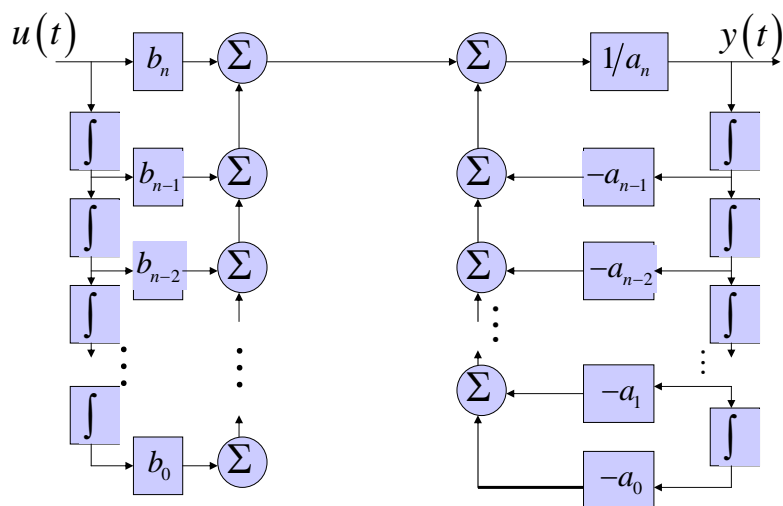
- Ratkaistaan $y(t)$

$$\begin{aligned} y(t) = -\frac{1}{a_n} \left(-a_{n-1} \int y(t) dt - a_{n-2} \int \int y(t) dt dt + \dots \right. \\ \left. + b_n x(t) + b_{n-1} \int x(t) dt + b_{n-2} \int \int x(t) dt dt + \dots \right) \end{aligned}$$

21.11.2006

46

Lohkodiagrammi



21.11.2006

47

Lohkodiagrammi

- Lohkodiagrammia voidaan yksinkertaistaa

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k (y(t) - u(t))}{dt^k} = 0$$

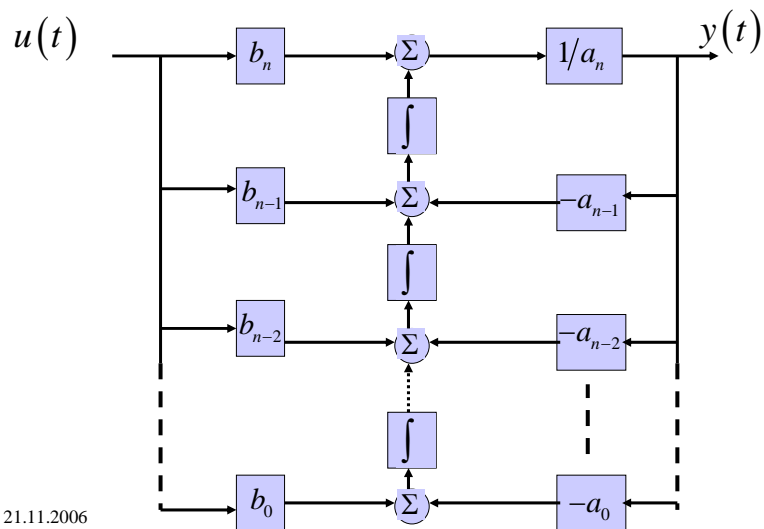
- Integroidaan yhtälö nyt n kertaa

$$\begin{aligned} & a_n y(t) - b_n u(t) + \int (a_{n-1} y(t) - b_{n-1} u(t)) dt \\ & + \iint (a_{n-2} y(t) - b_{n-2} u(t)) dt dt + \dots + \int \dots \int (a_0 y(t) - b_0 u(t)) dt \dots dt \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{1}{a_n} \left(b_n u(t) + \int (-a_{n-1} y(t) + b_{n-1} u(t)) dt \right. \\ & \left. + \iint (-a_{n-2} y(t) + b_{n-2} u(t)) dt dt + \dots + \int \dots \int (-a_0 y(t) + b_0 u(t)) dt \dots dt \right) \end{aligned}$$

21.11.2006

48

Lohkodiagrammi



Esimerkki 3

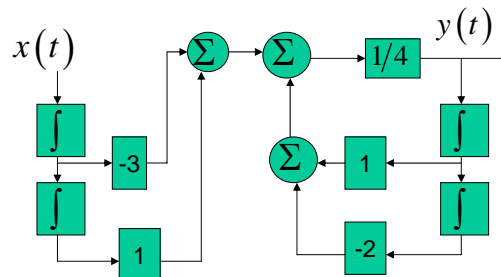
- Tarkastellaan 2. kertaluvun järjestelmää

$$4\ddot{y} - \dot{y} + 2y = -3\dot{x} + x$$

- Integroidaan molemmin puolin

$$4y = \int y dt - 2 \int \int y dt dt$$

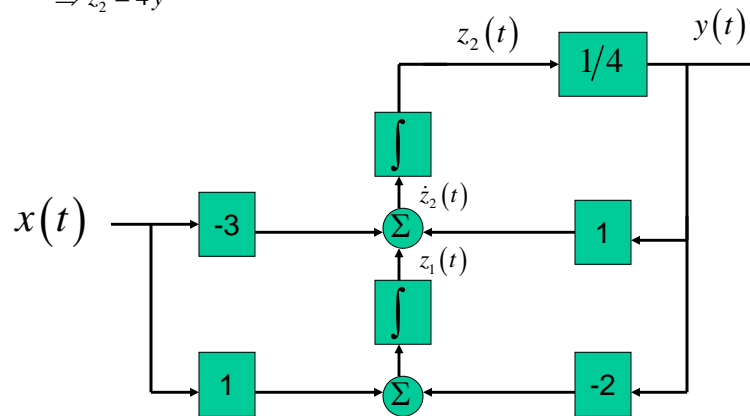
$$-3 \int x dt + \int \int x dt dt$$



Esimerkki 4

- Vaihtoehtoisesti

$$4\ddot{y} - \dot{y} + 3\dot{x} = -2y + x = \dot{z}_1 \Rightarrow z_1 = 4\dot{y} - y + 3x \Rightarrow \dot{z}_2 = z_1 + y - 3x = 4\dot{y} \Rightarrow z_2 = 4y$$



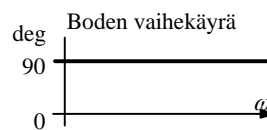
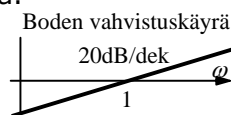
21.11.2006

51

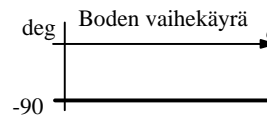
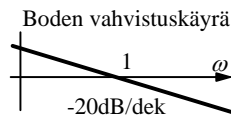
Lohkodiagrammi

- Mielivaltainen lineaarinen aikainvariantti järjestelmä voidaan realisoida käyttäen joko derivaattoreita tai integraattoreita.

Derivaattori



Integraattori



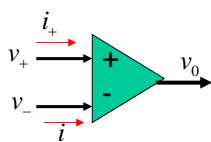
- Derivaattori vahvistaa korkeita taajuuksia ja on siten herkkä kohinalle. Integraattori puolestaan suodattaa kohinaa. => Lineaarinen järjestelmä kannattaa realisoida käyttäen integraattoreita

21.11.2006

52

Operaatiovahvistin

- Operaatiovahvistin (Op-Amp) on integroitu piiri
- Op-Amp omaa kaksi sisääntuloa (non-inverted + ja inverted -)
- Ominaisuuksia
 - Hyvin suuri vahvistus ($A > 10^6$)
 - Erittäin suuri sisäänmenoimpedanssi
 - Suuresta impedanssista johtuen, sisäänmenevät virrat ovat lähes nollaa $i_+ = i_- \approx 0$
 - Jos käytetään negatiivista takaisinkytkentää, niin $v_+ \approx v_-$



$$v_0 = A(v_+ - v_-)$$

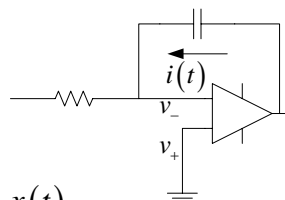
21.11.2006

53

Käytännöllinen integraattori

- Analoginen integraattori voidaan toteuttaa käyttäen operaatiovahvistinta

Virtual ground $v_- \approx v_+ = 0$



$$i(t) = C \frac{dy(t)}{dt}, \quad \because i_- \approx 0 \Rightarrow -\frac{x(t)}{R} = i(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = -RC \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{RC} \int x(t) dt$$

21.11.2006

54