

## Luento 7

---

- Lineaaristen järjestelmien analyysi
  - Järjestelmä yhdistelmät, takaisinkytkentä
  - Taajuusvaste
  - Stabiilisuus analyysi taajuustasossa

28.11.2006

1

## Järjestelmien kokoaminen osista

---

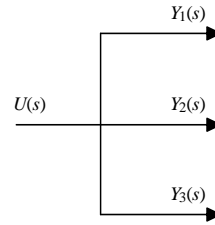
- Lineaaristen järjestelmien tapauksessa yksittäisinten osajärjestelmien malleista päästään laajojen järjestelmien malleihin lohkoalgebran avulla.
- Lohkoalgebrassa peruselementtejä ovat osajärjestelmiä kuvaavat siirtofunktiot
- Siirtofunktiot voivat perustua impulssivasteen
  - Laplace-muunnokseen  $H(s)$
  - Fourier-muunnokseen  $H(f)$  [ $s=i2\pi f$ ]

28.11.2006

2

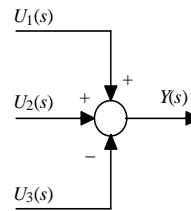
## Lohkokaaviomuunnokset: Signaalit

- Lohkokaavioissa yksittäinen signaali voidaan viedä useaan eri lohkkoon (signaalin haaraantuminen).
  - Lohkokaavio on informaatiokaavio ja informaatiota jaettaessa se ei vähene vaan monistuu. Jokaisessa haarassa kulkee sama informaatio.



$$Y_1(s) = Y_2(s) = Y_3(s) = U(s)$$

- Eri signaalit voidaan yhdistää summaelimen avulla. Summaelimestä voidaan signaalit laskea yhteen tai vähentää toisistaan.
  - Etumerkit summaelimestä signaalin kohdalla kertovat signaalin etumerkin summalausekkeessa.



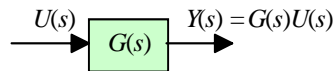
$$Y(s) = U_1(s) + U_2(s) - U_3(s)$$

28.11.2006

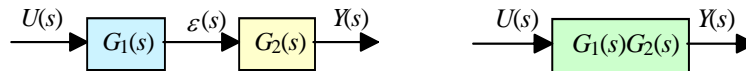
3

## Signaalin kulkeminen lohkon läpi

- Lohkon lähtösignaali (vaste) saadaan kertomalla tulosignaali (heräte) lohkon siirtofunktiolla



- Tämän peruskaavan avulla voidaan johtaa muunnoskaava lohkojen sarjakytkennälle. Otetaan käyttöön apumuuttuja  $\varepsilon(s)$ , joka myöhemmin eliminoidaan



$$\begin{cases} Y(s) = G_2(s)\varepsilon(s) \\ \varepsilon(s) = G_1(s)U(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = G_1(s)G_2(s)U(s) = G_{TOT}(s)U(s)$$

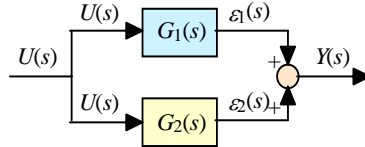
$$\Rightarrow G_{TOT}(s) = G_1(s)G_2(s)$$

28.11.2006

4

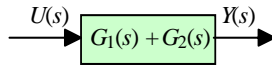
## Signaalin kulkeminen lohkon läpi

- Johdetaan nyt muunnoskaava rinnankytkennälle



$$\begin{cases} Y(s) = \varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s) \\ \varepsilon_1(s) = G_1(s)U(s) \\ \varepsilon_2(s) = G_2(s)U(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s)$$

$$Y(s) = (G_1(s) + G_2(s))U(s) = G_{TOT}(s)U(s) \Rightarrow G_{TOT}(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

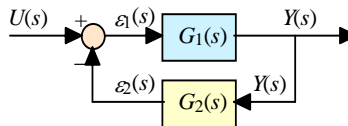


28.11.2006

5

## Signaalin kulkeminen lohkon läpi

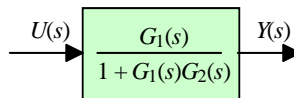
- Silmukkakytkennän (takaisinkytkennän) muunnoskaavaksi saadaan



$$\begin{cases} Y(s) = G_1(s)\varepsilon_1(s) \\ \varepsilon_1(s) = U(s) - \varepsilon_2(s) \\ \varepsilon_2(s) = G_2(s)Y(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = G_1(s)(U(s) - G_2(s)Y(s))$$

$$\Rightarrow Y(s) = G_1(s)U(s) - G_1(s)G_2(s)Y(s) \Rightarrow (1 + G_1(s)G_2(s))Y(s) = G_1(s)U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}U(s) = G_{TOT}(s)U(s) \Rightarrow G_{TOT}(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$



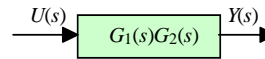
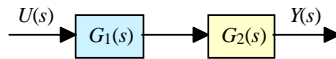
28.11.2006

6

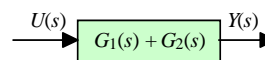
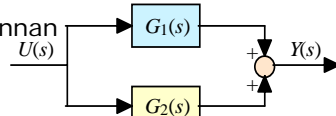
## Lohkokaaviomuunnokset: Peruskytkennät

- Peruskytkentöjen lohkokaaaviomuunnokset koottuna:

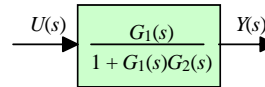
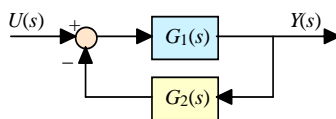
– Sarjaan



– Rinnan



– Silmukkaan

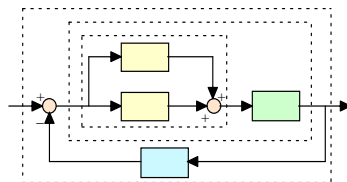


28.11.2006

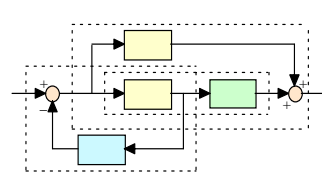
7

## Limittäiset rakenteet

- Jos järjestelmässä on limittäisiä rakenteita, niin lohkokaaaviomuunnokset voidaan ratkaista
  - algebrallisesti - kuten perusmuunnoskaavoja johtaessa
  - tai eliminoimalla limittäiset rakenteet (siirtämällä summa- ja haaraantumispisteitä lohkojen yli) ja sitten käyttämällä perusmuunnoskaavoja.



Ei limittäisiä rakenteita



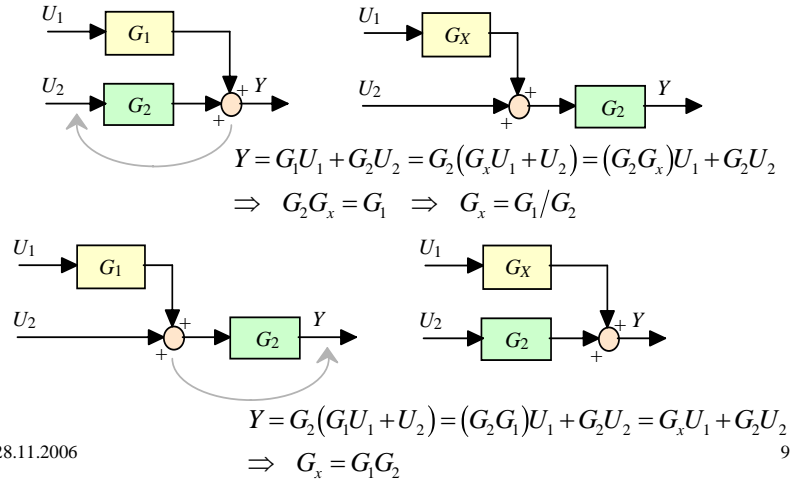
Limittäisiä rakenteita

28.11.2006

8

## Summa- ja haaraantumispisteiden siirrot

- Summapisteen siirto "vastavirtaan" ja "myötävirtaan" - ratkaistaan  $G_x$

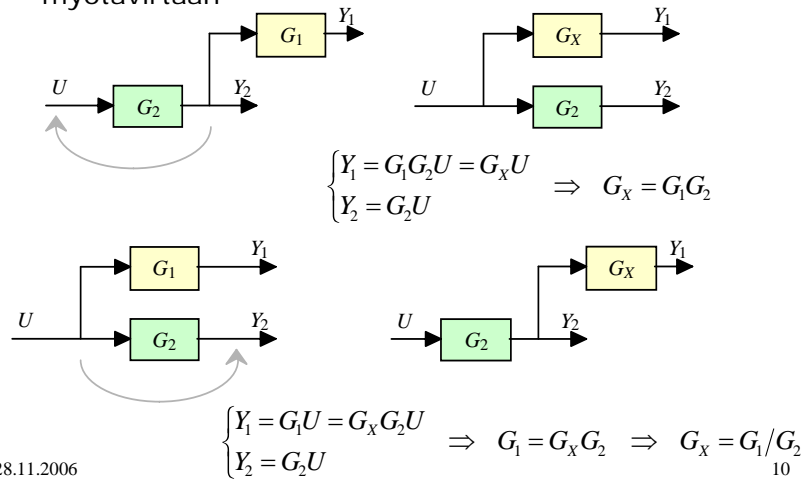


28.11.2006

9

## Summa- ja haaraantumispisteiden siirrot

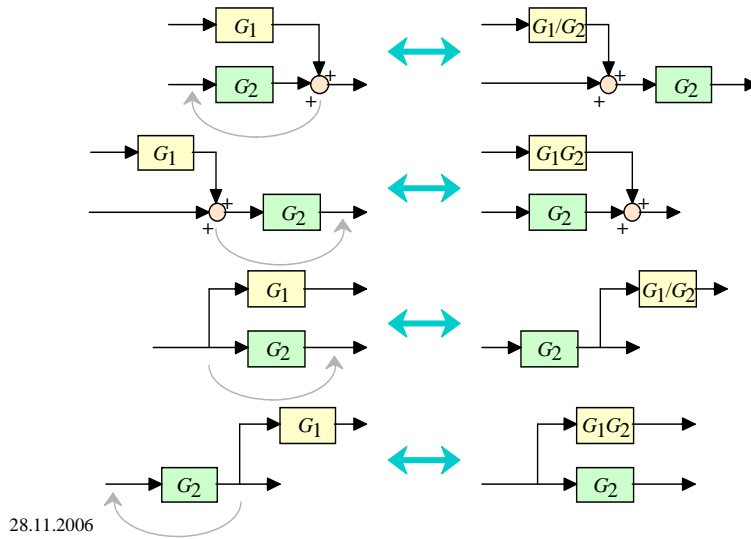
- Haaraantumispisteen siirto "vastavirtaan" ja "myötävirtaan"



28.11.2006

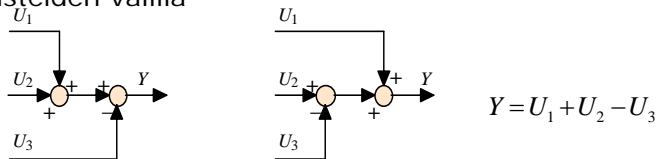
10

## Summa- ja haaraantumispisteiden siirrot

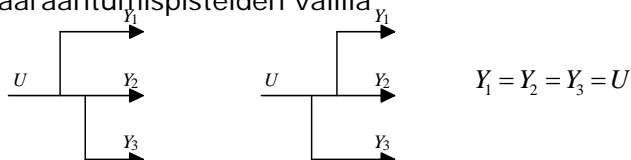


## Summa- ja haaraantumispisteiden siirrot

- Summapisteiden järjestystä voidaan vaihtaa toisten summapisteiden välillä



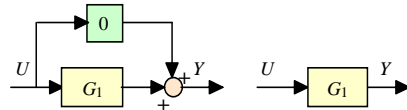
- Haaraantumispisteiden järjestystä voidaan vaihtaa toisten haaraantumispisteiden välillä



- Summapisteiden ja haaraantumispisteiden välistä järjestystä ei voida vaihtaa

## Nolla- ja ykköslohkot

- Mikäli lohkon siirtofunktio on nolla, niin kaikilla tulosuureen arvoilla lähtösuure on aina nolla. Tämä lohko kuvaa informaatiokatkoa - lohko, siihen tulevat ja siitä lähtevät signaalit voidaan jättää pois lohkoakaaviosta.

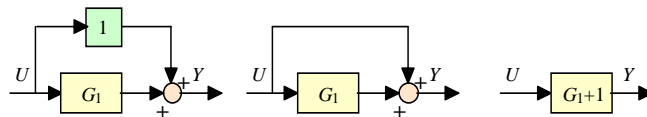


28.11.2006

13

## Nolla- ja ykköslohkot

- Mikäli lohkon siirtofunktio on yksi, niin kaikilla tulosuureen arvoilla lähtösuure on aina sama kuin tulosuure ja kyseinen lohko voidaan jättää kaaviosta pois. Järjestelmien lohkoakaaviossa on usein merkitty lohkot mittaukselle tai toimilaitteelle ja mikäli oletetaan ideaalinen mittaus tai toimilaitte, niin näiden lohkojen siirtofunktiot voidaan korvata ykkösellä - ja jättää kokonaan pois lohkoakaaviosta.

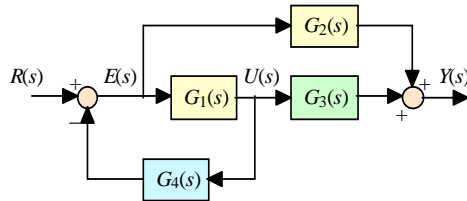


28.11.2006

14

## Esimerkki: limittäiset rakenteet

- Ratkaistaan oheisen järjestelmän kokonaissiirtofunktio tulosignaalista  $R$  lähtösignaaliin  $Y$  algebrallisesti



$$\begin{cases} Y = G_3 U + G_2 E \\ U = G_1 E \\ E = R - G_4 U \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = G_1 G_3 E + G_2 E \\ E = R - G_1 G_4 E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = (G_1 G_3 + G_2) E \\ (1 + G_1 G_4) E = R \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{G_1 G_3 + G_2}{1 + G_1 G_4} R = G_{TOT} R$$

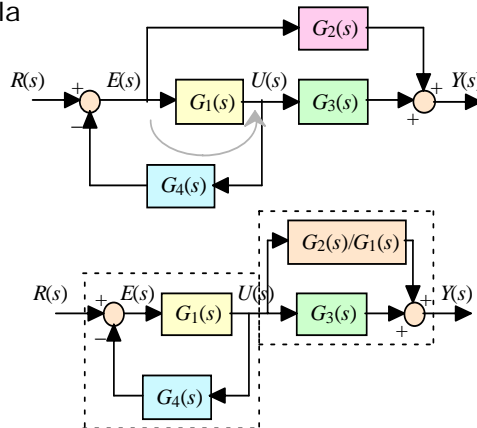
28.11.2006

15

## Esimerkki: limittäiset rakenteet

- Ratkaistaan oheisen järjestelmän kokonaissiirtofunktio tulosignaalista  $R$  lähtösignaaliin  $Y$  lohko-kaaviomuunnoksilla

- Siirretään  $E$ :n haaraantumispiste  $U$ :n haaraantumispisteen luo (haaraantumispisteiden järjestys voidaan vaihtaa keskenään), jolloin päästään eroon limittäisistä rakenteista ja voidaan käyttää aikaisemmin johdettuja peruskytkentöjen kaavoja.



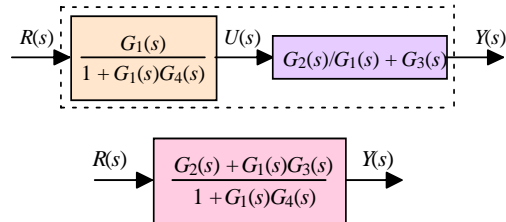
28.11.2006

16



## Esimerkki: limittäiset rakenteet

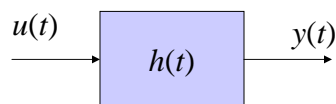
- Saadaan sama tulos kuin lohkokaavioalgebralla



28.11.2006

17

## LTI-järjestelmät



- Tarkastellaan lineaarista aikainvarianttia järjestelmää

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) = -a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) - \dots - a_0 y(t) + b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \dots + b_0 u(t), n \geq m$$

- Käytetään pyörivää osoitinta herätteenä

$$u(t) = e^{i2\pi ft}$$

ja arvataan, että vaste on muotoa

$$y(t) = H(f)e^{i2\pi ft}$$

28.11.2006

18

## LTI-järjestelmät

- Sijoittamalla heräte sekä arvattu vaste differentiaaliyhtälöön saadaan

$$\left( (i2\pi f)^n + \sum_{l=0}^{n-1} a_l (i2\pi f)^l \right) H(f) e^{i2\pi ft} = \sum_{k=0}^m b_k (i2\pi f)^k e^{i2\pi ft}$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (i2\pi f)^k}{(i2\pi f)^n + \sum_{l=0}^{n-1} a_l (i2\pi f)^l} \quad \text{Siirtofunktio}$$

- Joten taajuudella  $f$  pyörivää osoitin generoi vasteeksi samalla taajuudella pyörivän osoittimen, jonka amplitudi ja vaihe ovat muuttuneet

$$y(t) = H(f) e^{i2\pi ft} = |H(f)| e^{i2\pi ft + i \arg H(f)}$$

28.11.2006

19

## Taajuusvaste

- Järjestelmän **taajuusvaste** saadaan syöttämällä sisään eri taajuisia sini-muotoisia signaaleja ja katsomalla kuinka niiden amplitudi ja vaihe muuttuvat kulkiessaan järjestelmän läpi.

$$u(t) = \cos(2\pi ft) = \frac{1}{2} (e^{i2\pi ft} + e^{-i2\pi ft})$$

$$y(t) = \frac{1}{2} H(f) e^{i2\pi ft} + \frac{1}{2} H^*(f) e^{-i2\pi ft}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} |H(f)| e^{i2\pi ft + i \arg(H(f))} + \frac{1}{2} |H(f)| e^{-i2\pi ft - i \arg(H(f))}$$

$$y(t) = |H(f)| \cos(2\pi ft + \arg H(f))$$

Lineaarinen järjestelmä ei aiheuta taajuuden muuntumista.

28.11.2006

20

## Taajuusvaste

- Taajuusvaste on järjestelmän vaste sini-muotoiseen herätteeseen.
- **Siirtofunktio**

$$H(f) = |H(f)| e^{j \arg(H(f))} = A(f) e^{-j\phi(f)}$$

- **Amplitudivaste** (amplitudi funktio)

$$A(f) = |H(f)|$$

- **Vaihevaste** (vaihefunktio)

$$\phi(f) = -\arg(H(f))$$

- **Vaiheviive** (kantoaallon viive) [phase/carrier delay]

Vaihesiirto vastaa aikatasossa signaalin viivästymistä

$$t_d(f) = \phi(f) / 2\pi f$$

$$F\{\delta(t - t_d)\} = e^{-i2\pi f t_d}$$

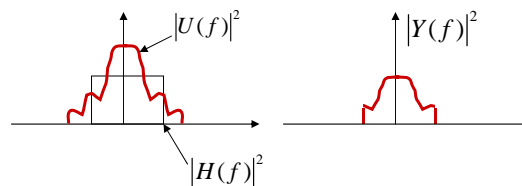
28.11.2006

21

## Taajuusvaste

- Vasteen  $y(t)$  Fourier-muunnos:  $Y(f) = H(f)U(f)$
- Vasteen  $y(t)$  spektritiheys saadaan impulssivasteen ja herätteen spektritiheyksien tulona:

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |U(f)|^2$$



$|H(f)|^2$  **Tehonsiirtofunktio**

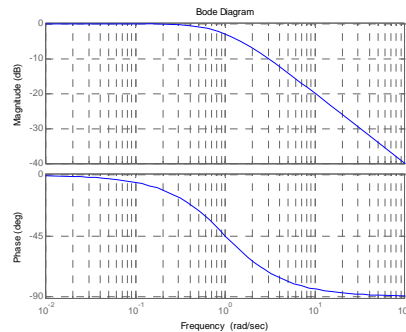
- Järjestelmä suodattaa signaalia  $u(t)$

28.11.2006

22

## Boden käyrät

- **Vahvistuskäyrä**
  - Tehonsiirtofunktio  
logaritmi  
kulmataajuuden  $\omega = 2\pi f$  (rad/s) funktiona  
 $20 \log_{10}(|H(\omega/(2\pi))|)$
- **Vaihekäyrä**
  - Vaiheaste asteina  
 $\phi(f) \cdot 180^\circ/(\pi)$   
kulmataajuuden  $\omega = 2\pi f$  (rad/s) funktiona  
 $\phi(\omega/(2\pi))$



28.11.2006

23

## Amplitudi ja vaihevääristymät

- Halutaan siirtää signaali  $u(t)$  järjestelmän läpi, ilman että signaalin muoto vääristyy.
  - Ideaalitapauksessa  $y(t) = a \cdot u(t - \tau_d)$ , missä  $a > 0$  on vakio
  - Tätä vastaa taajuusvaste  $Y(f) = a \cdot U(f) \cdot e^{-i2\pi f \tau_d}$
  - Tällöin järjestelmän siirtofunktion pitää olla vakio  $H(f) = a \cdot e^{-i2\pi f \tau}$  koko signaalin  $u(t)$  kaistalla
  - Käytännössä näin ei tapahdu, vaan signaali vääristyy
    - **Amplitudi vääristymä:**  $A(f) \neq A$
    - **Vaihevääristymä:**  $\phi(f) \neq 2\pi f \tau$

28.11.2006

24

## Amplitudi ja vaihevääristymät

- **Ryhmäkulkuaika**

$$t_g(f) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \phi(f)$$

kuvaa vaiheen muutosta taajuuden funktiona.

- Idealisessa tapauksessa  $t_g$  on taajuudesta riippumaton vakio.
- **Vaihevääristymä** kaistanpäästösignaalille  $u(t)$  kaistalla  $(f_c - B/2, f_c + B/2)$ ,  $f_c$  kantoaallon taajuus

$$\Delta t_g = \max_{f \in (f_c - B/2, f_c + B/2)} |t_g(f) - t_g(f_c)|$$

$$\Delta \phi = \int_f^{f+\Delta f} d\phi \leq 2\pi \Delta t_g \Delta f$$

Vaiheen muutos taajuuden muutoksen suhteen

28.11.2006

25

## Vaihevääristymät

- Tarkastellaan lineaarisesti moduloitua signaalia, jonka kaistanleveys on  $B$

$$u(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$U(f) = \frac{1}{2} X(f + f_c) + \frac{1}{2} X(f - f_c)$$

- Signaali kulkee kanavan (järjestelmän) läpi.
- Kanavan siirtofunktio on

$$H(f) = a e^{-i(2\pi f \tau_g + \phi_0 \operatorname{sgn} f)}$$

$$A(f) = a$$

Amplitudivaste

$$\phi(f) = 2\pi f \tau_g + \phi_0, \quad f > 0$$

Vaihevaste

- Vaiheviive

$$t_d(f) = \tau_g + \frac{\phi_0}{2\pi f}$$

- Ryhmäviive

$$28.11.2006 \quad t_g(f) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(f)}{df} = \tau_g$$

26

## Vaihevääristymät

- Ulostulosignaali taajuustasossa

$$Y(f) = H(f)U(f) = \frac{1}{2} X(f + f_c) a e^{-i2\pi f \tau_d + i\phi_d} + \frac{1}{2} X(f - f_c) e^{-i2\pi f \tau_d - i\phi_d}$$

- ja aikatasossa  $F\{\cos(2\pi f_c t + \phi)\} = \delta(f + f_c) e^{-i\phi} + \delta(f - f_c) e^{i\phi}$

$$y(t) = x(t - \tau_g) \cos(2\pi f_c (t - \tau_d) - \phi_d)$$

$$y(t) = x(t - \tau_g) \cos(2\pi f_c (t - t_d(f_c))) \quad \tau_d = \tau_g + \frac{\phi_0}{2\pi}$$

Ryhmäviive

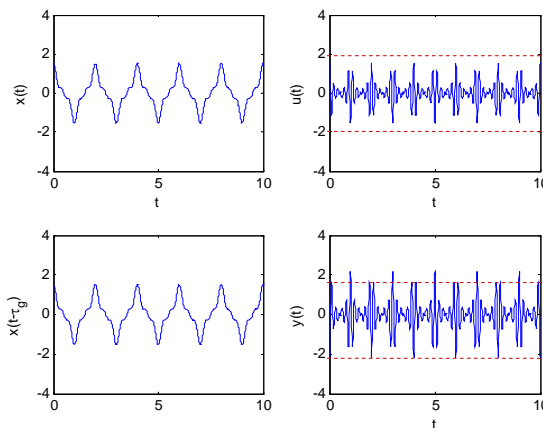
Vaiheviive / kantoaallon viive

28.11.2006

27

## Vaihevääristymät

- Pelkkä vakio vaiheensiirto  $\phi_0$  voi aiheuttaa signaalin vakavaa vääristymistä



28.11.2006

$$y(t) = x(t - \tau_g) \cos(2\pi f_c (t - \tau_d))$$

28

## Esimerkki 1.

- Tarkastellaan  $T$ :n mittaista jännitepulsseja  $u_{in}(t)$ , jonka amplitudi on  $A$ .

$$u_{in}(t) = A\Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$$

- RC-suodattimen impulssivaste  $h(t) = 1/\tau e^{-t/\tau}$ ,  $\tau = RC$
- Ratkaistaan suodattimen ulostulo  $u_{out}(t)$

28.11.2006

29

## Esimerkki 1.

- Viivästetyn pulssin Fourier-muunnos

$$U_{in}(f) = F\{u_{in}(t)\} = F\left\{A\Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)\right\} = AT \operatorname{sinc}(fT) e^{-i2\pi\frac{T}{2}f} = A \frac{1 - e^{-i2\pi fT}}{i2\pi f}$$

$$F\{x(t - \tau)\} = X(f)e^{-i2\pi f\tau}$$

$$F\left\{A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = AT \operatorname{sinc}(fT)$$

- Impulssivasteen Fourier-muunnos

$$H(f) = F\{h(t)\} = F\{\tau e^{-t/\tau}\} = \frac{1}{i2\pi f\tau + 1}$$

- Suodatettu signaali

$$U_{out}(f) = H(f)U_{in}(f) = A \frac{1 - e^{-i2\pi fT}}{i2\pi f} H(f)$$

28.11.2006

30

## Esimerkki

- Olostulojännitteen Fourier-muunnos

$$U_{out}(f) = H(f)U_{in}(f) = A \frac{1}{i2\pi f} H(f) (1 - e^{-i2\pi f T})$$

$$= X(f) - X(f)e^{-i2\pi f T}, \quad X(f) = A \frac{1}{i2\pi f} H(f)$$

- Ratkaistaan  $X(f)$ :n käänteismuunnos

$$F \left\{ \int x(t) dt \right\} \Leftrightarrow \frac{X(f)}{i2\pi f}$$

$$x(t) = F^{-1} \{ X(f) \} = F^{-1} \left\{ A \frac{1}{i2\pi f} H(f) \right\} = \begin{cases} A \int_0^t \frac{1}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau} t} dt = A \left( 1 - e^{-\frac{1}{\tau} t} \right) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Olostulojännitteen lausekkeeksi saadaan

$$u_{out}(t) = F^{-1} \{ U_{out}(f) \} = F^{-1} \{ X(f) - X(f)e^{-i2\pi f T} \} = x(t) - x(t-T)$$

$$F \{ x(t-\tau) \} = X(f)e^{-i2\pi f \tau}$$

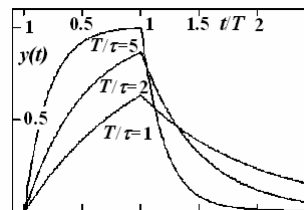
28.11.2006

31

## Esimerkki 1.

- Suodatettu pulssi

$$u_{out}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A \left( 1 - e^{-\frac{1}{\tau} t} \right) & 0 \leq t \leq T \\ A \left( e^{-\frac{1}{\tau}(t-T)} - e^{-\frac{1}{\tau} t} \right) & t > T \end{cases}$$



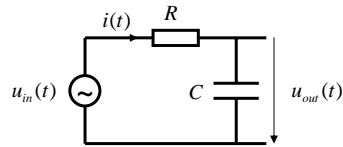
28.11.2006

32



## Esimerkki 2.

- Tarkastellaan RC-suodinta



$$i(t) = C \frac{d}{dt} u_{out}(t)$$

$$u_m(t) = Ri(t) + u_{out}(t)$$

$$\frac{d}{dt} u_{out}(t) = \frac{1}{RC} (u_m(t) - u_{out}(t))$$

Impulssivaste

$$\frac{d}{dt} h(t) = \frac{1}{RC} (\delta(t) - h(t))$$

$$\Rightarrow i2\pi f H(f) = \frac{1}{RC} (1 - H(f))$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{\frac{1}{RC}}{i2\pi f + \frac{1}{RC}}$$

$$h(t) = F^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{RC}}{i2\pi f + \frac{1}{RC}} \right\} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

28.11.2006

33

## Esimerkki 2.

- Jos  $RC=1$ , niin

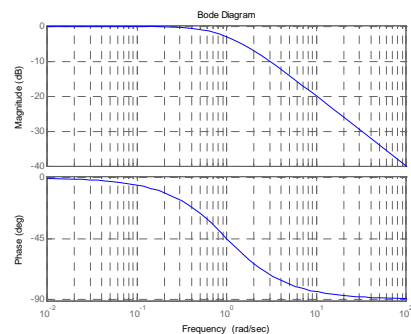
$$h(t) = \exp(-t), \quad t \geq 0$$

$$H(f) = \int_0^{\infty} \exp(-(i2\pi f + 1)t) dt = \frac{1}{i2\pi f + 1}$$

$$A(f) = |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi f)^2 + 1}}$$

$$\arg\{|H(f)|\} = \text{atan}(-2\pi f)$$

$$\phi(f) = -\arg\{H(f)\} = \arctan(2\pi f)$$



28.11.2006

$\omega = 2\pi f$

34

## Esimerkki 2.

- Ryhmäviive

$$t_g(f) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \phi(f) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \arctan(2\pi f) = \frac{1}{1+(2\pi f)^2}$$

- Taajuusvääristymä kaistalla  $B=2/2\pi$  Hz taajuuden ympäristössä  $f_c=2/2\pi$  Hz kaistanleveydellä

$$\Delta\tau_g = \max_{f \in \left(\frac{1}{2\pi}, \frac{3}{2\pi}\right)} \left| \frac{1}{1+(2\pi f)^2} - \frac{1}{1+\left(2\pi \frac{1}{2\pi}\right)^2} \right| = \left| \frac{1}{1+\left(2\pi \frac{3}{2\pi}\right)^2} - \frac{1}{1+\left(2\pi \frac{2}{2\pi}\right)^2} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{10} - \frac{1}{2} \right| = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\Delta\phi \leq 2\pi\Delta t_g \Delta f = 2\pi \cdot \frac{2}{5} \Delta f$$

28.11.2006

35

## Esimerkki 2.

- Tarkastellaan signaalia

$$u_{in}(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_1 \cos(2\pi f_2 t) \quad f_1 = \frac{1}{2\pi}, \quad f_2 = \frac{3}{2\pi}$$

- Siirtofunktio

$$H(f) = \frac{1}{1+i2\pi f}$$

$$H\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i0.25\pi}$$

$$H\left(\frac{3}{2\pi}\right) = \frac{1}{1+i3} = \frac{1}{\sqrt{10}} e^{-i\arctan(3)} \approx \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-i0.3976\pi}$$

- Vaiheen muutos  $B=2/(2\pi)$  kaistalla

$$\Delta\phi = \arctan(3) - \arctan(1) \approx 0.4636 \quad \Delta\phi \leq 2\pi\Delta t_g \Delta f = 2\pi \cdot \frac{2}{5} \frac{2}{2\pi} = \frac{4}{5} = 0.8$$

- Ulostulo signaali

$$u_{out}(t) = A_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t - 0.25\pi) + A_1 \frac{1}{\sqrt{5}} \cos(3(t - 0.1325\pi))$$

28.11.2006

36

## Taajuusvasteen tekijät

- Taajuustasossa osoittajan tekijöiden itseisarvot kerrotaan keskenään ja ne jaetaan nimittäjän tekijöiden itseisarvoilla. Osoittajan tekijöiden napakulmat lasketaan yhteen ja niistä vähennetään nimittäjän tekijöiden napakulmat.

s-tason siirtofunktio    f-tason siirtofunktio

$$G(s) = \frac{s-a}{(s-b)(s-c)} \Rightarrow G(i2\pi f) \triangleq G(f) = \frac{i2\pi f - a}{(i2\pi f - b)(i2\pi f - c)}$$

$$|G(f)| = \frac{|i2\pi f - a|}{|i2\pi f - b| \cdot |i2\pi f - c|} = \frac{\sqrt{(i2\pi f)^2 + a^2}}{\sqrt{(i2\pi f)^2 + b^2} \cdot \sqrt{(i2\pi f)^2 + c^2}}$$

$$\angle\{G(f)\} = \angle\{i2\pi f - a\} - \angle\{i2\pi f - b\} - \angle\{i2\pi f - c\}$$

$\angle$  kompleksin luvun kulma (arg)

28.11.2006

37

## Taajuusvasteen tekijät

- Tehonsiirtofunktio esitetään usein desibeleinä

$$10\log_{10}(|G(f)|^2) = 20\log_{10}(|G(f)|)$$

$$= 20\log_{10}(|G(f)|) = 20\log_{10}\left(\frac{|i2\pi f - a|}{|i2\pi f - b| \cdot |i2\pi f - c|}\right)$$

$$= 20 \cdot (\log_{10}|i2\pi f - a| - \log_{10}|i2\pi f - b| - \log_{10}|i2\pi f - c|)$$

$$\log\left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right) = \log(p_1) + \log(p_2) - \log(p_3)$$

28.11.2006

38

## Taajuusvasteen tekijät

- Desibelin yksikkö dB on suhteellinen yksikkö
- Tehonsiirron tapauksessa yksikkö on
  - dBW (dB verrattuna 1 W:iin)
  - dBm (dB verrattuna 1 mW:iin)
  - dBp (dB verrattuna 1 pW:iin)
  - dBf (dB verrattuna 1 fW:iin)

$$\begin{aligned} 1mW &= 10^{-3}W \\ 10\log_{10}\left(\frac{10^{-3}W}{W}\right) &= -30\log_{10} 10 \text{ dBW} \\ &= -30\text{dBW} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 200mW &= 0.2W \\ 10\log_{10}\left(\frac{0.2W}{10^{-3}W}\right) &= 10\log_{10}\left(\frac{200mW}{1mW}\right) \\ &= 10\log_{10}(200) \text{ dBm} \approx 23 \text{ dBm} \\ 10\log_{10}\left(\frac{0.2W}{1W}\right) &= 10\log_{10}(0.2) \text{ dBW} \approx -7 \text{ dBW} \end{aligned}$$

28.11.2006

39

## Taajuusvasteen tekijät

- Jännitesignaalin tapauksessa amplitudivasteen  $|G(f)|$ :n yksikkö on voltia V
  - dBV (dB verrattuna 1 V:iin)
  - dBmV (dB verrattuna 1 mV:iin)

$$10\log_{10}(|G(f)|) \text{ dBV mutta } 20\log_{10}(|G(f)|) \text{ dBW}$$

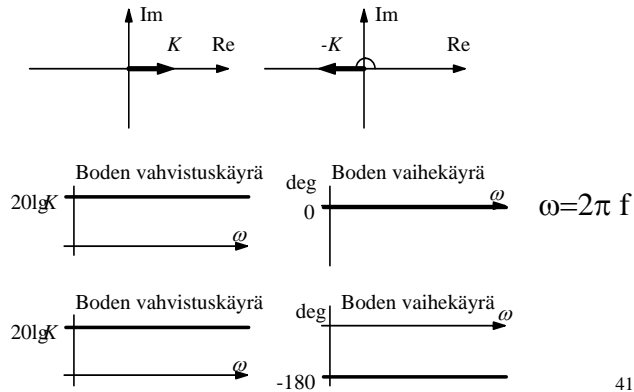
28.11.2006

40

## Vakiokerroin

- Siirtofunktio on reaalinen ja vakio

$$\begin{cases} |G_1(f)| = |G_2(f)| = K \\ \angle\{G_1(f)\} = 0, \quad \angle\{G_2(f)\} = -\pi \quad \text{rad} = -180^\circ \end{cases}$$



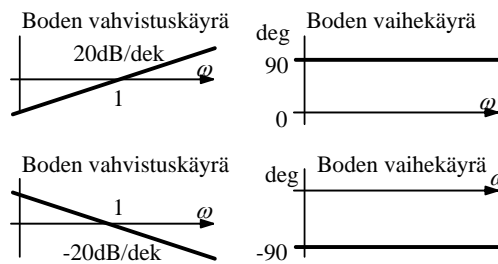
28.11.2006

41

## Integraattori ja derivaattori

$$\begin{cases} G_1(f) = i2\pi f & \text{Derivaattorin siirtofunktio} \\ G_2(f) = \frac{1}{i2\pi f} = -i \frac{1}{2\pi f} & \text{Integraattorin siirtofunktio} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |G_1(f)| = 2\pi f, \quad |G_2(f)| = \frac{1}{2\pi f} \\ \angle\{G_1(j\omega)\} = \frac{\pi}{2}, \quad \angle\{G_2(j\omega)\} = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} = -90^\circ \end{cases}$$



28.11.2006

42

## Viive

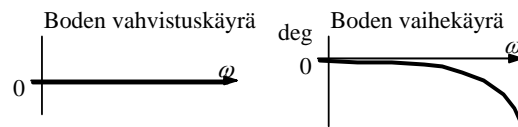
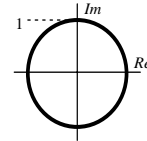
- Viive aikatasossa vastaa vaihesiirtoa taajuustasossa

$$G(f) = e^{-i2\pi f\tau}$$

$$= \cos(2\pi f\tau) - j \cdot \sin(2\pi f\tau)$$

$$|G(f)| = \sqrt{\cos^2(2\pi f\tau) + \sin^2(2\pi f\tau)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\angle\{G(f)\} = \arctan\left(\frac{-\sin(2\pi f\tau)}{\cos(2\pi f\tau)}\right) = -\arctan(\tan(2\pi f\tau)) = -2\pi f\tau$$



28.11.2006

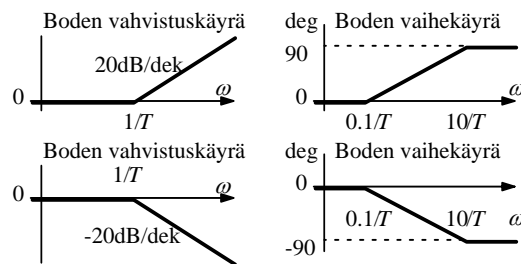
43

## Ensimmäisen kertaluvun termit

- 1. kertaluvun siirtofunktiot

$$\begin{cases} G_1(f) = i2\pi fT + 1 \\ G_2(f) = \frac{1}{i2\pi fT + 1}, T > 0 \end{cases}$$

- Approksimaatio Boden diagrammille



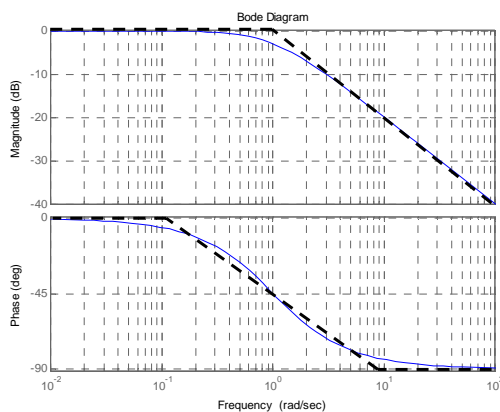
28.11.2006

44

## Ensimmäisen kertaluvun termit

- 1. kertaluvun järjestelmän Boden kuvaaja

$$G_2(f) = \frac{1}{i2\pi f + 1}$$



28.11.2006

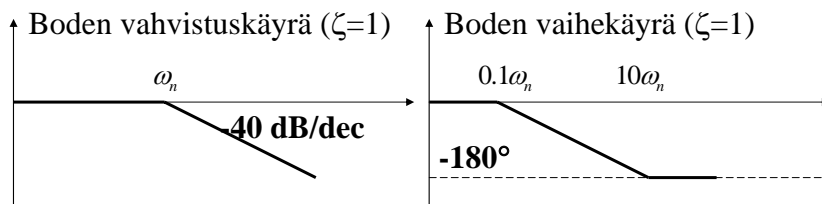
45

## Toisen kertaluvun termit

- Toisenkertaluvun siirtofunktio

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow G(f) = \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - (2\pi f)^2) + i(2\pi f)2\zeta\omega_n}$$

$$= \frac{1}{1 - ((2\pi f)/\omega_n)^2 + 2\zeta((2\pi f)/\omega_n) \cdot j} \quad \text{Resonanssitaajuus: } \omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$



28.11.2006

46

## Toisen kertaluvun termit

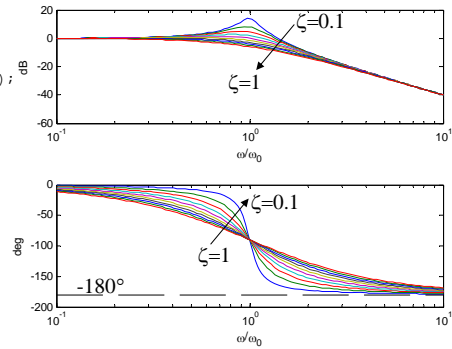
```

w0=1;
w=logspace(-1,1,100);
zeta=0.1:0.1:1;

for k=1:length(zeta)
    sys{k}=tf([0 0 w0^2],[1
    2*zeta(k)*w0 w0^2]);
    [mag(k,:),pha(k,:)] = bode(sys{k},w);
end;

subplot(2,1,1)
semilogx(w/w0,20*log10(mag))
xlabel('\omega/\omega_0')
ylabel('dB')

subplot(2,1,2)
semilogx(w/w0,pha,w/w0,-
    180*ones(size(w),'k--'))
xlabel('\omega/\omega_0')
ylabel('deg')
    
```

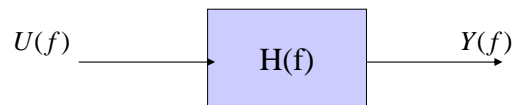


28.11.2006

47

## Stabiilisuus

- Tarkastellaan stabiilin järjestelmää  $H(f) = A(f)e^{-i\phi(f)}$



- Tarkastellaan sini-muotoista herätettä

$$H(f) = A(f)e^{-i\phi(f)}$$

$$u(t) = \cos(2\pi f t)$$

$$y(t) = A(f)\cos(2\pi f t - \phi(f))$$

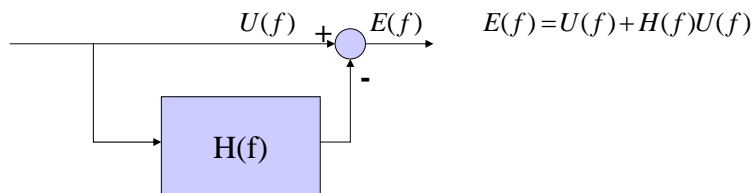
28.11.2006

48



## Stabiilisuus

- Myötäkytkentä



$$e(t) = \cos(2\pi f) - A(f)\cos(2\pi f - \phi(f))$$

- Jos vaihesiirtoa on  $180^\circ$  ero signaali  $e(t)$  interferoi konstruktiiivisesti (merkki vaihtuu)

$$e(t) = (1 + A(f))\cos(2\pi f)$$

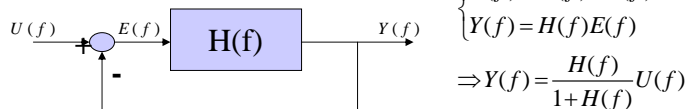
$$|e(t)| > |u(t)|$$

28.11.2006

49

## Stabiilisuus

- Tehdään negatiivinen takaisinkytkentä



- Jos järjestelmän  $H$  vaihesiirto on  $-180^\circ$ , niin signaaliin  $u(t)$  summautuu se itse  $A(f)$ :llä skaalattuna rekursiivisesti

$$e_0(t) = u(t)$$

$$e_1(t) = A(f)e_0(t) + u(t) = (A(f) + 1)u(t)$$

$$e_2(t) = A(f)e_1(t) + u(t) = (A^2(f) + A(f) + 1)u(t)$$

$$e_k(t) = (A^k(f) + A^{k-1}(f) + \dots + A(f) + 1)u(t)$$

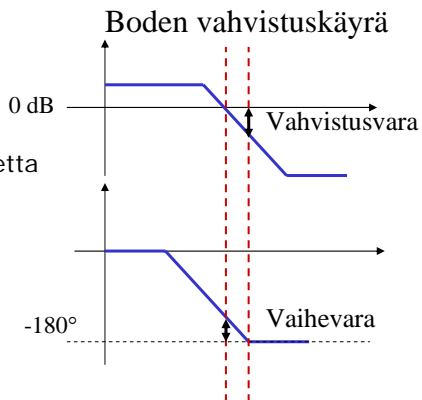
- Summa  $1 + A(f) + A(f)^2 + \dots$  konvergoi arvoon  $1/(1 + A(f))$ , jos  $A(f) < 1$ , jolloin  $y(t) = A(f)e(t)$  pysyy rajoitettuna

28.11.2006

50

## Stabiilisuus kriteeri

- Sillä taajuudella, jolla vaihe leikkaa  $-180^\circ$  vahvistuksen pitää olla  $20\log_{10}(A(f)) < 0$  dB
- **Vahvistusvara:** Kuinkapaljon vahvistusta voidaan kasvattaa ennen kuin takaisinkytketystä järjestelmästä tulee epästabili
- **Vaihevara:** Kuinkapaljon vaihetta voidaan jättää ennen kuin järjestelmästä tulee epästabili



28.11.2006

51

## Esimerkki 3.

- Ensimmäisenkertaluvun systeemi voidaan tulkita takaisinkytketyksi integraaliksi

$$G(f) = \frac{K}{i2\pi f + K} = \frac{\frac{K}{i2\pi f}}{1 + \frac{K}{i2\pi f}} = \frac{H(f)}{1 + H(f)}$$

- Avoimen silmukan siirtofunktio

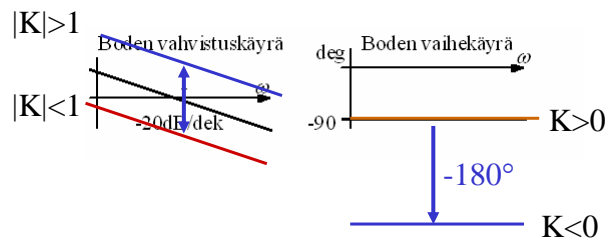
$$H(f) = K \frac{1}{i2\pi f}$$

28.11.2006

52

## Esimerkki 3.

- Jos  $K < 0$  se vastaa  $-180^\circ$  vaihesiirtoa ja  $20\log_{10}(|K|)$  vahvistusta
- Jos  $K > 0$  se vastaa  $0^\circ$  vaihesiirtoa ja  $20\log_{10}(|K|)$  vahvistusta



- Jos  $K < 1$  vaihe on  $-270^\circ$  kaikilla  $f$ , koska  $|H(f)| \rightarrow \infty$   $f \rightarrow 0$ , ei takaisinkytketty järjestelmä ole stabiili
- Jos  $K > 1$  vaihe on  $-90^\circ$  kaikilla  $f$ , joten takaisinkytketty järjestelmä on stabiili

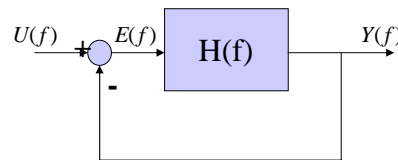
28.11.2006

53

## Esimerkki 4.

- Tarkastellaan 3. kertaluvun suodatinta

$$H(f) = K \frac{1}{(i2\pi f + 1)^2}$$



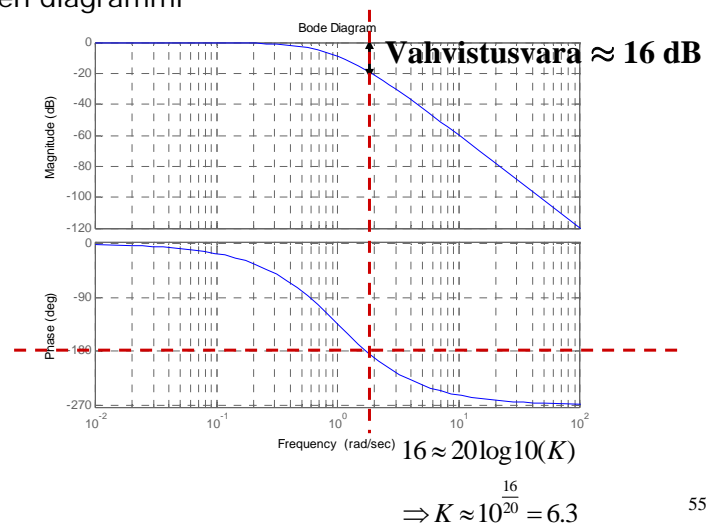
- Ratkaistaan suurin mahdollinen  $K$ :n arvo, jolla takaisinkytketty järjestelmä on stabiili

28.11.2006

54

## Esimerkki 4

- Bode diagrammi



28.11.2006

55