Luento 8

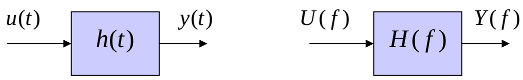
- Lineaarinen suodatus
  - Ideaaliset alipäästö, ylipäästö ja kaistanpäästösuodattimet
  - Käytännölliset suodattimet

Suodattimien käyttötarkoitus

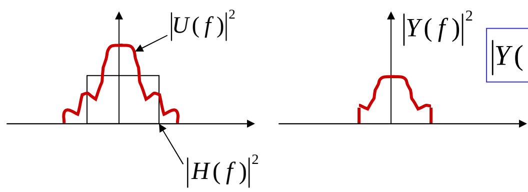
- Signaalikaistan ulkopuolisen kohinan ja häiriöiden vaimentaminen
- Signaalien erottaminen muista signaaleista esim. radiovastaanottimessa
- Halutun pulssimuodon tai -spektrin generoiminen
- Sovitettu suodatin signaalikohinasuhteen maksimoimiseksi näytteenottohetkellä
- Siirtokanavan aiheuttamien lineaaristen vääristymien korjaus
- Alkuperäisen signaalin rekonstruktio näytteistä
- Dupleksisuodattimet (ylä- ja alasuunnan liikenteen erottaminen omille kaistoilleen)
- Esikorostus/jälkikorjausmenetelmät
- Peilitaajuussignaalin vaimentaminen superhetero dyneperiaatteella toimivassa radiovastaanottimessa
- jne

Lineaarinen suodatus

- Vasteen y(t) Fourier-muunnos: Y(f)=H(f)U(f)



- Vasteen y(t) spektritiheys saadaan impulssivasteen ja herätteen spektritiheyksien tulona:



$$\boxed{|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 |U(f)|^2}$$

$|H(f)|^2$ ***Tehonsiirtofunktio***

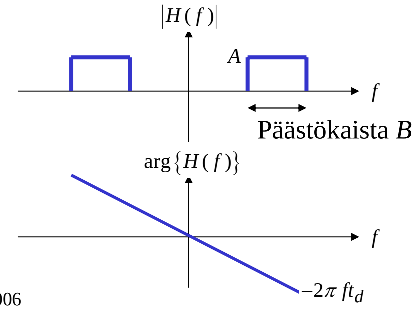
- Järjestelmä suodattaa signaalia u(t)

Ideaaliset alipäästö, ylipäästö ja kaistanpäästösuodattimet

- Ideaalinen suodatin
  - Päästökaistalla: A(f)=A ja ϕ(f)=2πft$_d$

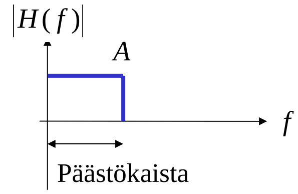
    => Suodin ei aiheuta amplitudi ja vaihevääristymiä
  - Estokaistalla amplitudivaste A(f)=0

    => Estokaistalla oleva signaali ei näy suotimen ulostulossa lainkaan

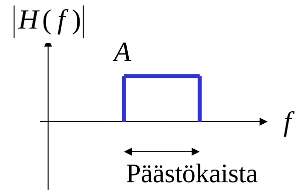


Ideaaliset alipäästö, ylipäästö ja kaistanpäästösuodattimet

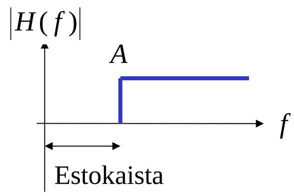
- Alipäästösuodatin



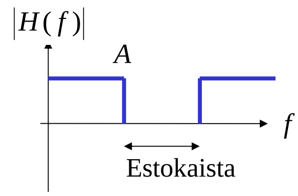
- Kaistanpäästösuodatin



- Ylipäästösuodatin



- Kaistanestosuodatin

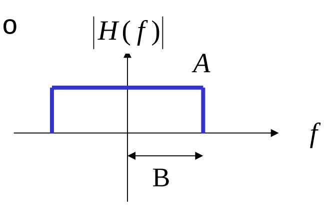


Ideaalinen alipäästösuodatin

- Tarkastellaan ideaalista alipäästösuodinta, jonka päästökaistan leveys on B.
  - Suodattimen siirtofunktio

$$\boxed{H(f)=\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)e^{-i2\pi f t_d}}$$

$$\boxed{\Pi(f)=\begin{cases}1 & |f|\le \frac{1}{2}\\ 0 & |f|>\frac{1}{2}\end{cases}}$$



  - Suodattimen impulssivaste

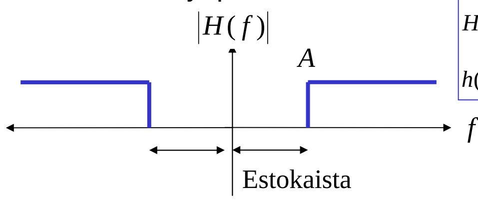
$$\boxed{h(t)=F^{-1}\{H(f)\}=2BA\,\mathrm{sinc}\left(2B\left(t-t_d\right)\right)}$$

Ideaaliset yli- ja kaistanpäästösuodattimet

- Ideaalinen ylipäästösuodin

$$H(f) = \left(1 - \Pi\left(\frac{f}{2B}\right)\right) e^{-i2\pi f t_d}$$

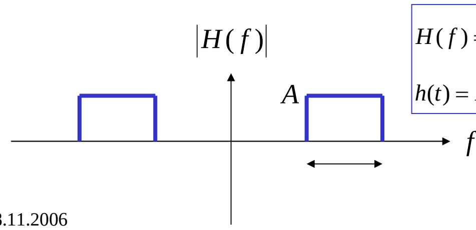
$$h(t) = \delta(t - t_d) - 2BA\,\mathrm{sinc}\left(2B\left(t - t_d\right)\right)$$



- Ideaalinen kaistanpäästösuodin

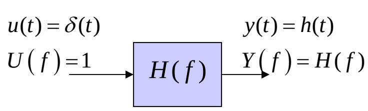
$$H(f) = \left(\Pi\left(\frac{f + f_c}{2B}\right) + \Pi\left(\frac{f - f_c}{2B}\right)\right) e^{-i2\pi f t_d}$$

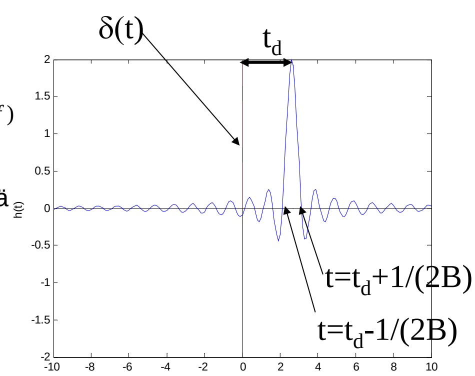
$$h(t) = BA\,\mathrm{sinc}\left(2B\left(t - t_d\right)\right)\cos\left(2\pi f_c t\right)$$



Ideaalinen alipäästösuodin

- Alipäästösuodattimen impulssivaste





Impulssiheräte ajanhetkellä t=0 näkyy vasteessa y(t) myös ajanhetkinä t<0

=> Ideaalinen alipäästösuodin ei ole kausaalinen eikä sitä voida realisoida käytännössä

- Myös ideaaliset yli-, esto- ja kaistanpäästösuodattimet ovat epäkausaalisia.

Aika- ja taajuustason rajoitukset

- Aikarajoitettu (Time limited signal)

  $$v(t) = 0, \quad t < t_0 \vee t > t_1$$

- Kaistarajoitettu signaali (Bandlimited signal)

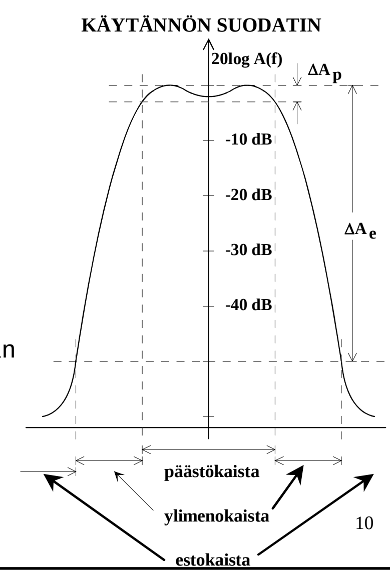
  $$V(f) = 0, \quad |f| > W$$

- Signaali ei voi olla rajoitettu sekä aika- että taajuustasossa.

=> Ei ole mahdollista tehdä suodatinta, jonka impulssivaste olisi aikatasossa rajattu ja jonka päästökaista olisi taajuustasossa rajattu

Käytännön suodattimet

- Käytännön suodattimessa
  - Päästökaistan (passband) amplitudivaste ei ole vakio vaan sillä sallitaan ΔA_p suuruisia amplitudieroja.
  - Päästökaistaa seuraa ylimenokaista (transition region), jolla amplitudivaste laskee nopeasti
  - Estokaistalla (stopband) amplitudivaste valitaan sovelluksen kannalta riittävän pieneksi. ΔA_e kuvaa estokaistalle vaadittua vaimennusta päästökaistan maksimiin nähden



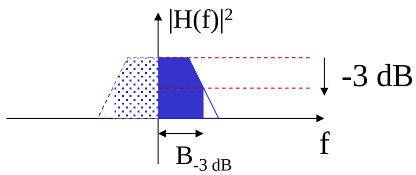
Päästökaista

- **Puolentehon kaistanleveys** kertoo taajuuskaistan, missä signaalin amplitudi erot ΔA on pienempi kuin

$$\Delta A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Erot tehonsiirrossa kaistalla on tällöin enintään 3dB

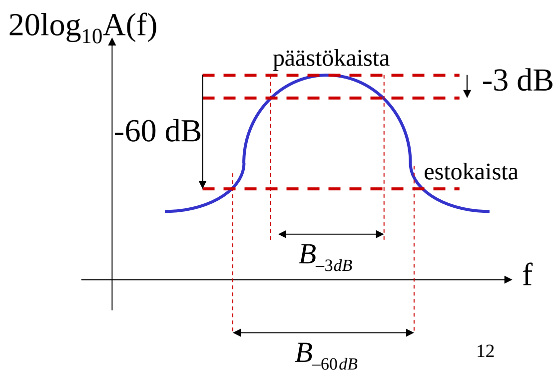
$$\frac{|H(f)|^2}{\max_f |H(f)|^2} \le \frac{1}{2}$$



Selektiivisyys

- Useissa käytännön sovelluksissa tavoitteena on mahdollisimman kapea ylimenokaista.
- Suodattimen selektiivisyys kertoo ylimenokaistan koosta
- Määritellään selektiivisyyssuhde r_{sel} suodattimen 3dB ja -60 dB kaistanleveyksien suhteena

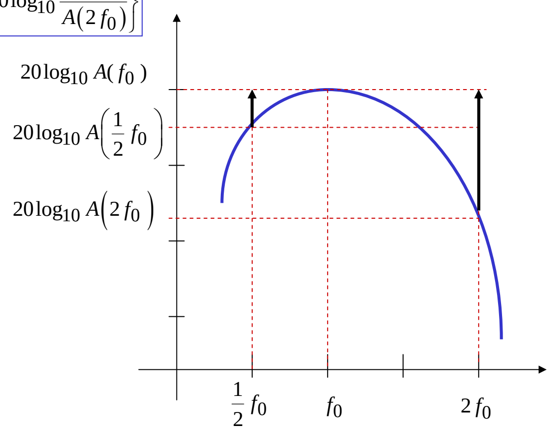
$$\boxed{r_{sel} = \frac{B_{-3dB}}{B_{-60dB}}}$$



Selektiivisyys

- Oktaaviselektiivisyys

$$OS = \min\left\{20\log_{10}\frac{A(f_0)}{A(0{,}5f_0)},\ 20\log_{10}\frac{A(f_0)}{A(2f_0)}\right\}$$



RC-suodatin

- Siirtofunktio

$$H(f) = \frac{1}{i2\pi f\tau_1 + 1}, \quad \tau = RC$$

- Amplitudifunktio

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi f\tau_1)^2 + 1}}$$

maksimi löytyy taajudelta f=0 Hz

A(0)=1

- -3 dB päästökaista

$$\frac{A(B_{-3})}{A(0)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi B_{-3}\tau_1)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow (2\pi B_{-3}\tau_1)^2 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow 2\pi B_{-3}\tau_1 = 1$$

$$\Rightarrow B_{-3} = \frac{1}{2\pi\tau_1}$$

- -60 dB kaista

$$\frac{A(B_{-60})}{A(0)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi B_{-60}\tau)^2 + 1}} = \sqrt{10^{-\frac{60}{10}}} = \sqrt{\frac{1}{10^6}}$$

$$\Rightarrow (2\pi B_{-60}\tau)^2 + 1 = 10^6$$

$$\Rightarrow 2\pi B_{-60}\tau = \sqrt{10^6 - 1} \approx 1000$$

$$\Rightarrow B_{-60} = \frac{\sqrt{10^6 - 1}}{2\pi\tau}$$

RC-suodatin

- RC-suotimen selektiivisyys

$$r_{sel} = \frac{B_{-3}}{B_{-60}} = \frac{\frac{1}{2\pi\tau}}{\frac{\sqrt{10^6 - 1}}{2\pi\tau}} = \sqrt{10^6 - 1} \approx 1000$$

Kaksi RC-suodatinta sarjassa

- Siirtofunktio ja amplitudifunktio

$$H(f) = \frac{1}{(i2\pi f \tau_2 + 1)^2}, \quad \tau_2 = RC$$

- Valitaan aikavakio τ siten, että päästökaista on sama kuin edellä $B_{-3} = \frac{1}{2\pi\tau}$

$$A\left(\frac{1}{2\pi\tau_1}\right) = \frac{1}{\left(2\pi \frac{1}{2\pi\tau}\tau_2\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^2 = \sqrt{2} - 1$$

$$\tau_2 = \sqrt{\sqrt{2} - 1}\tau_1 \approx 0.64\tau_1$$

Kaksi RC-suodatinta sarjassa

- -60 dB:n kaista

$$A(B_{-60}) = \frac{1}{(2\pi B_{-60}\tau_2)^2 + 1} = \sqrt{10^{-\frac{60}{10}}} = \frac{1}{1000}$$

$$\Leftrightarrow (2\pi B_{-60}\tau_2)^2 + 1 = 1000$$

$$\Leftrightarrow B_{-60} = \sqrt{999}\frac{1}{2\pi\tau_2} = \sqrt{\frac{999}{\sqrt{2}-1}}\frac{1}{2\pi\tau_1}$$

$$\boxed{\tau_2 = \sqrt{\sqrt{2}-1}\tau_1 \approx 0.64\tau_1}$$

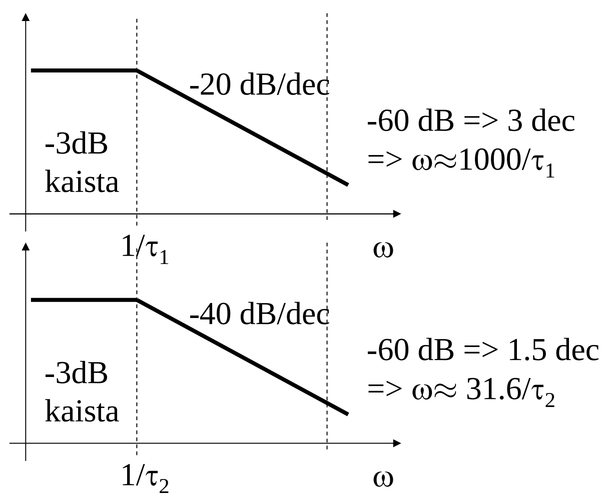
$$= \sqrt{\frac{999}{\sqrt{2}-1}}B_{-3}$$

$$r_{sel} = \frac{r_{-3}}{r_{-60}} = \sqrt{\frac{999}{\sqrt{2}-1}} \approx 49{,}1$$

- Toisen asteen suodattimella saadaan huomattavasti parempi selektiivisyys

K1. ja 2. kertaluvun RC suotimet

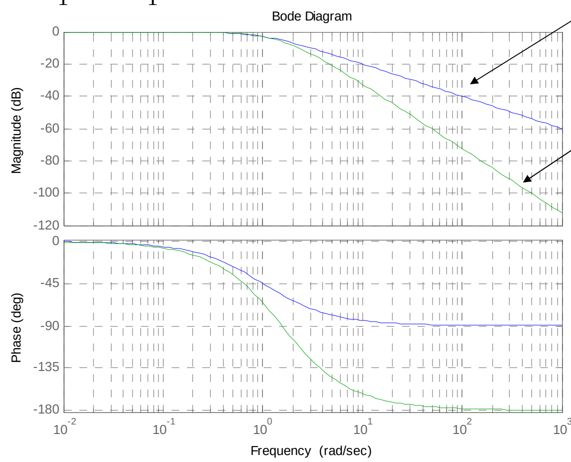
- Boden amplitudikäyrän approksimaationt



1. ja 2. kertaluvun RC suotimet

- RC-suodatin ja kaksi RC-suodatinta sarjassa

$$\tau_2 = \sqrt{\sqrt{2}-1}\,\tau_1 \approx 0.64\tau_1$$



1. asteen RC-suodatin

2. asteen RC-suodatin

Käytännön suodattimet

- Käytännölliset lineaariset suodattimet ovat kausaalisia, ja ne esitetään usein siirtofunktion avulla

$$\boxed{H(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{(s-z_1)^{M_1}(s-z_2)^{M_2}\ldots(s-z_m)^{M_m}}{(s-p_1)^{N_1}(s-p_2)^{N_2}\ldots(s-p_N)^{N_n}}}$$

- Suodattimet valitaan stabiileiksi, jolloin siirtofunktion navat N(s)=0 ovat kompleksitason vasemmassa puolitasossa.

- Jotta impulssivaste olisi reaalinen, pitää taajustason siirtofunktion on ***hermiittinen***

$$\boxed{H(f) = H^*(-f), \text{ and } |\mathrm{H}(\mathrm{f})|^2 = H(f)H^*(f)}$$

$$\boxed{s = i2\pi f}$$

Käytännön suodattimet

- Valitsemalla s-tasossa sopivat nolla- ja napayhdistelmät saadaan haluttuja ominaisuuksia omaavat suodattimet, esim.
  - päästökaistan amplitudivääristymän suhteen (laakalatvaisuus, aaltoilu),
  - päästökaistan kulkuaikavääristymän suhteen,
  - estokaistan vaimennuksen suhteen,
  - ylimenokaistan jyrkkyyden suhteen.
- Erilaisia suodatinperheitä, jotka määrittelevät navat ja nollat halutulle asteluvulle, on esitetty useita.
  - Butterworth
  - Bessel
  - Tšebyshev
  - Bessel (Thomson)
  - Cauer
  - ...

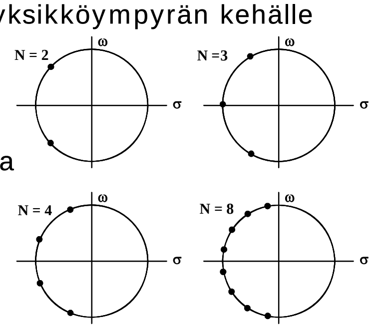
Butterworth suodartinperhe

- Butterworh suodattimen navat ovat 1:n juuria ja ne saadaan ratkaistuksi DeMoivren teoreemasta

$$\sqrt[m]{1} = \sqrt[m]{1e^{j0}} = \sqrt[m]{1}e^{\left(\frac{j2\pi k}{m}\right)} \quad k = 0,1,2,3,4,\cdots,(m-1)$$

juuret ovat tasajakautuneita yksikköympyrän kehälle taajuustasossa.

- Jotta suodatin olisi stabiili valtaan vain navat, jotka ovat vasemmassa puolitasossa



3. Asteen Butterworth suodin

- Suunnitellaan n=3 asteen Butterworth suodin, jonka kaistanleveys on W
- Jos m=6 saadaan, löydetään DeMoivren teoreemalla kuusi juurta

$$\sqrt[m]{1} = \sqrt[m]{1e^{j0}} = \sqrt[m]{1e^{\left(\frac{j2\pi k}{m}\right)}} \quad k = 0,1,2,3,4,\cdots,(m-1)$$

$$s_1 = 1\angle 0^\circ = 1, s_2 = 1\angle 60^\circ = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, s_3 = 1\angle 120^\circ = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$s_4 = 1\angle 180^\circ = -1, s_5 = 1\angle 240^\circ = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}, s_6 = 1\angle 300^\circ = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Joista valitaan kolme vasemmassa puolitasossa olevaa:

$$p_1 = s_3 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2},\ p_2 = s_4 = -1,\ p_3 = s_5 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Asteen Butterworth suodin

- Siirtofunktioksi tulee

$$H(s) = \frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

- Taajuustasossa

$$|H(f)|^2 = H(f)H^*(f)\Big|_{s=i2\pi f} = \frac{1}{(i2\pi f)^6 + 1}$$

- Amplitudi funktio

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{(i2\pi f)^6 + 1}}$$

3. Asteen Butterworth suodin

- Puolentehon kaistanleveys

$$A(f)=\frac{1}{\sqrt{(i2\pi f)^6+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow (i2\pi f)^6+1=2$$
$$\Rightarrow f=\frac{1}{2\pi}$$

- Haluttu puolentehon kaistanleveys W saadaan valitsemalla s=s/2πW

$$H\left(\frac{s}{2\pi W}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{2\pi W}\right)^3 s^3+2\left(\frac{1}{2\pi W}\right)^2 s^2+2\left(\frac{1}{2\pi W}\right)s+1}$$
$$=\frac{(2\pi W)^3}{s^3+2(2\pi W)s^2+2(2\pi W)^2 s+(2\pi W)^3}$$

28.11.2006 25

3. Asteen Butterworth

- Siirtofunktioksi saadaan siis

$$H\left(\frac{s}{2\pi W}\right)=\frac{(2\pi W)^3}{s^3+2(2\pi W)s^2+2(2\pi W)^2 s+(2\pi W)^3}$$

- Tätä vastaa amplitudi funktio

$$A(f)=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f}{W}\right)^6+1}}$$

28.11.2006 26

Butterworth suodartinperhe

- Suodattimen amplitudifunktio on

$$A(f) = \frac{1}{\sqrt{1+(f/W)^{2n}}}$$

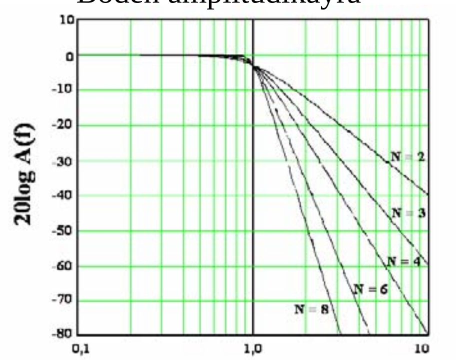
jossa *W* on suodattimen puolen tehon kaistanleveys ja *n* suodattimen aste-luku.

  - Amplitudifunktio on laakalatvainen, siinä ei ole aaltoilua. Laakalatvaisuus merkitsee sitä, että amplitudifunktion n ensimmäistä derivaatta saa arvon nolla taajudella f = 0.

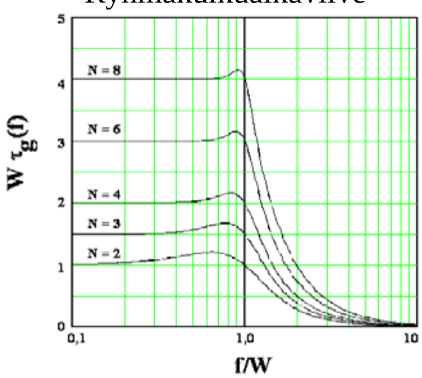
Butterworth suotimet

- Matalilla taajuuksilla ryhmäkulkuaika on vakio, joten taajuusvääristymää ei Butterwoth suotimessa synny, jos sisäänmeno signaalin taajuuskaista << W

Boden amplitudikäyrä

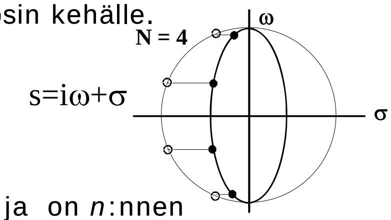


Ryhmäkulkuaikaviive



Tšebyshevin suodatinperhe

- Tšebyshev-suodattimen navat saadaan kun Butterworth-suodattimen navat liikkuvat vaakasuoraan ympyrään sisäänkirjoitetun ellipsin kehälle.
- Amplitudifunktio on



$$A(f) = \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2 C_n^2(0)}{1+\varepsilon^2 C_n^2(f/W)}}$$

jossa ε on ellipsin eksentrisyys, ja on n:nnen kertaluvun Tšebyshevin polynomi.

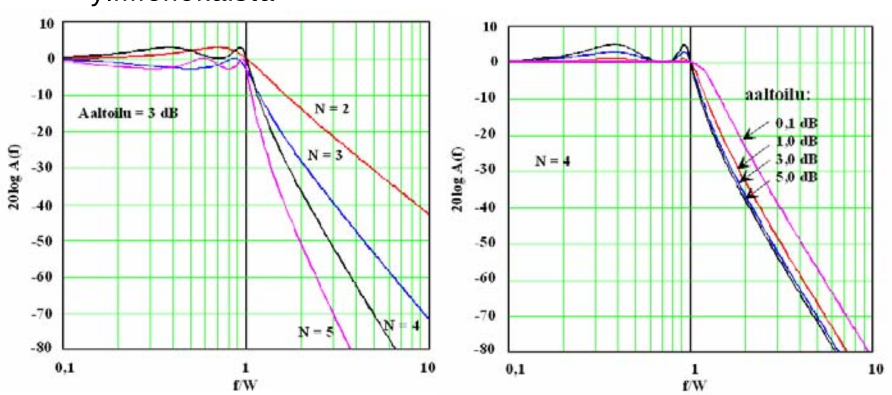
$C_n(x) = 2x\,C_{n-1}(x) - C_{n-2}(x)$ $C_0(x) = 1$ $C_1(x) = x$

- Amplitudifunktio sisältää ***aaltoilun***, jonka maksimi- ja minimiamplitudin suhde päästökaistalla on

$$r_A = \sqrt{1+\varepsilon^2}$$

Tšebyshevin suodatinperhe

- Mitä suurempi aaltoilu sallitaan sitä kapeampi on ylimenokaista



Transversaalisuodattimet

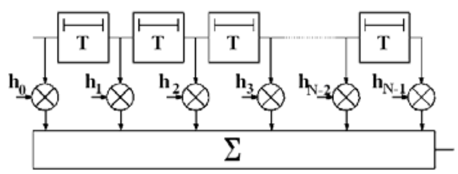
- Approksimoidaan suodatinta suoraan sen impulssivasteesta lähtien.
- Näytteistetään impulssivaste N:llä näytteellä

$$\boxed{h_S(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta\left(t - kT\right)}$$

- Taajuusvaste

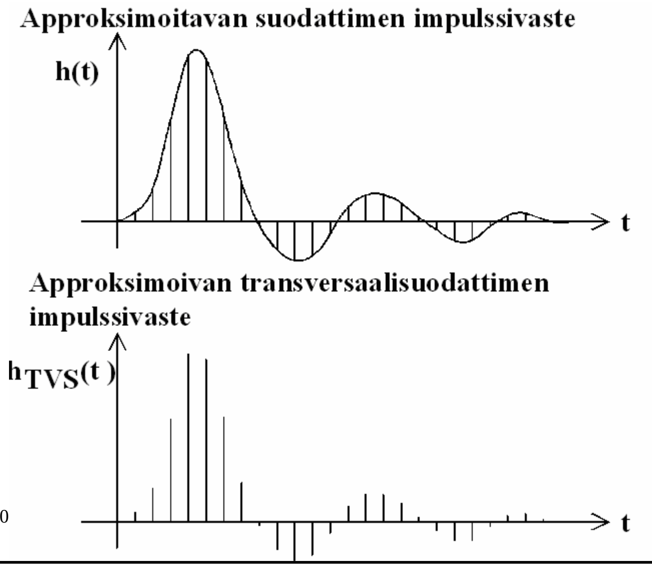
$$\boxed{H_S(f) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)e^{-i2\pi fkT}}$$

Transversaalisuodattimet



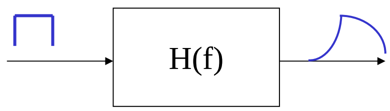
- Suodatinta vastaa viivästysalkioista koostuva viivelinja ja jokaisen viivealkion jälkeen on väliulosotto, jossa viivästetty tulosignaali kerrotaan kertoimella h_k.
- Väliulosottoja kutsutaan tapeiksi ja kertoimia kutsutaan tappikertoimiki.
- Kun tappikertoimet ovat riittävän tiheästi (näytteenottoteoreema) ja riittävän monta voidaan approksimoida mitä tahansa impulssivaste.
- Koska suuria tappimääriä on vaikea rakentaa, on käytettävä sopivia ikkunafunktioita katkaisun aiheuttaman spektri levenemisen lieventämiseksi.
- Käytännön toteutus esim. käyttäen digitaalista FIR-suodinta

Transversaalisuodattimet



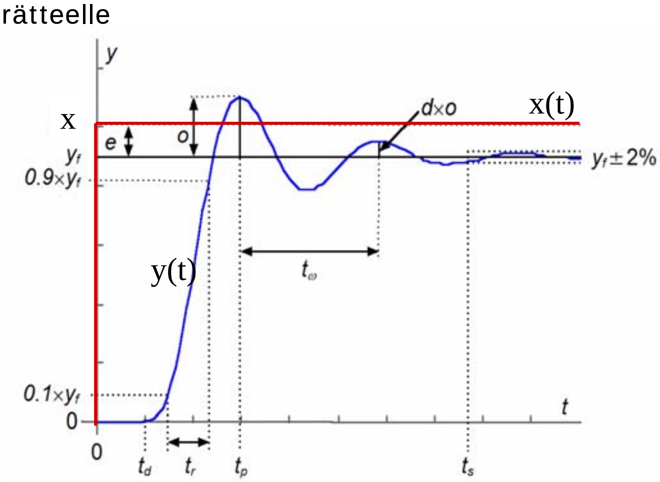
Pulssin suodattaminen

- Pulssi-muotoinen signaali sisältää korkeita taajuuksia, jotka suodattuvat alipäästösuodattimessa.
- Pulssin kulkua suodattimen läpi kuvaa nousuaika (rise time) ja ylitys (overshoot) ja asettumisaika (settiling time)



Askelvaste

- Askelvaste kertoo järjestelmän vasteen askelmaiselle herätteelle



Askelvaste

- Askelvasteen käyttäytymistä kuvataan seuraavilla suureilla
  - t_d = kuollut aika, viive
  - y_f = lopputila
  - x = askeleen korkeus
  - e = pysyvä poikkeama ($e = x - y_f$)
  - t_r = nousuaika (tavallisimmin määritetty ajaksi, joka kuluu, kun vaste nousee arvosta $0.1y_f$ arvoon $0.9y_f$).
  - t_ω = värähtelyn jaksonaika
  - t_s = asettumisaika (tavallisimmin määritetty ajaksi, jonka jälkeen vaste pysyy putken $y_f \pm 2\%$ tai $y_f \pm 5\%$ sisällä – vastaavat termit ovat kahden ja viiden prosentin asettumisajat)
  - t_p = vastehuipun aika (peak time)
  - o = ylitys (overshoot)
  - d = vaimennuskerroin

Pulssin suodattaminen

- Jotta pulssi perättäiset pulssit voitaisiin erottaa toisistaan, pitää suodattimen kaistanleveys olla selvästi suurempi kuin pulssin puolentehon kaistanleveys

  $B >> 1/T$
- Jos pelkkä pulssin amplitudin havaitseminen riittää, selvitään pienemmällä kaistanleveydellä

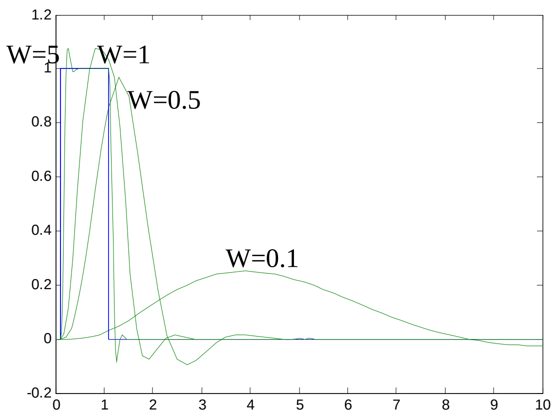
  $B \geq 1/(2T)$
- Jos pulssille halutaan tietty nousuaika, vaaditaan

  $B \geq 1/(2t_r)$

28.11.2006

3. Asteen Butterworth

- Tarkastellaan T=1 pituisen pulssin suodatusta



28.11.2006

3. Asteen Butterworth

- Nousuaika