

Luento 9

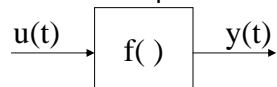
- Epälineaarisuus

28.11.2006

1

Epälineaarisuus

- Tarkastellaan passiivista epälineaarista komponenttia



- Taylor-sarjakehitelmä

$$y = f(x_0) + \frac{1}{2!} f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{3!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{4!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

- Epälineaarisuuden läpi kulkenut signaali

$$y(t) = f(u(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u^k(t)$$

- Kertolasku aikatasossa vastaa konvoluutiota taajuustasossa

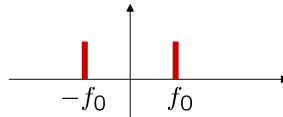
$$Y(f) = f(u(t)) = \alpha_0 \delta(f) + \alpha_1 U(f) + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k U^{*(k)}(f) \quad 2$$

Epälineaarisuus

- Tarkastellaan sini-muotoista herätettä
 $u(t) = 2 \cos(2\pi f_0 t)$

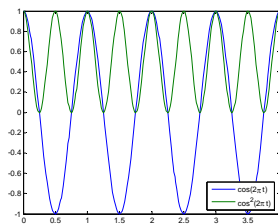
- Fourier-muunnos

$$U(f) = \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)$$

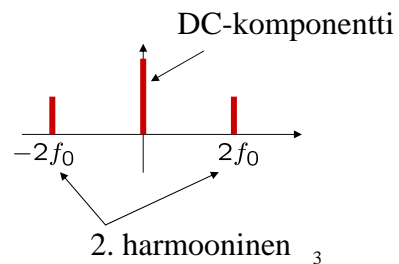


- Epälineaarisuus $y(t) = u^2(t)$

$$Y(f) = U * U(f) = \delta(f + 2f_0) + 2\delta(f) + \delta(f - 2f_0)$$



28.11.2006

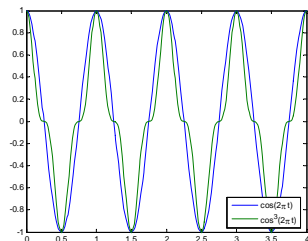


3

Epälineaarisuus

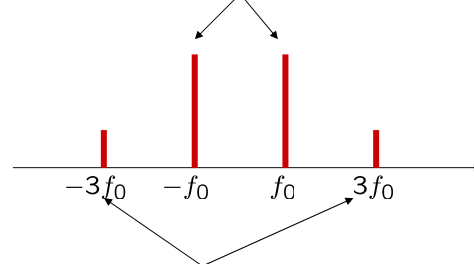
- Epälineaarisuus $y(t) = u^3(t)$

$$Y(f) = U *^{(2)} U(f) = \delta(f + 3f_0) + 3\delta(f + f_0) + 3\delta(f - f_0) + \delta(f - 3f_0)$$



28.11.2006

Signaalin taajuudella



3. Harmooninen taajuus

4

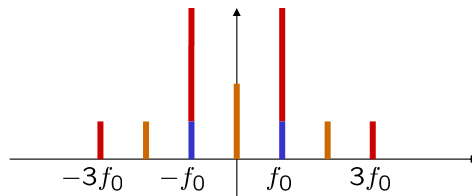
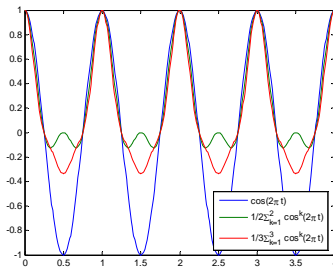
Epälineaarisuus

- Epälineaarisuudet synnyttävät harmonisia taajuuksia
- Approksimoidaan epälineaarisuutta Taylor-sarjan kolmella ensimmäisellä termillä:

$$y(t) \approx \alpha_0 + \alpha_1 u(t) + \alpha_1 u^2(t) + \alpha_2 u^3(t)$$

Parilliset potenssit
synnyttävät harmonisia, jotka
voidaan poistaa suodattamalla

Parittomat potenssit
aiheuttavat komponentteja
myös signaalin
taajuudelle



5

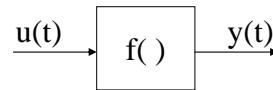
Särö

- Yleinen epälineaarisuus

$$f(x_0) + \frac{1}{2!} f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{3!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{4!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots$$

$$= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

- Kun tulosignaali on kosini
 $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$



- niin epälineaarisuuden lähtösignaali

$$y(t) = f(x(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x(t))^k$$

voidaan kirjoittaa tulosignaalin **harmonisten yliaaltojen** avulla

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \cos(2\pi k f_x t)$$

28.11.2006

6

Särö

- Epälineaarisuuden vaikutusta signaaliin voidaan tarkastella **särökertoimien** (distortion) avulla

– n. asteen särökerroin:

$$d_n = \frac{u_n}{u_1} \quad n=2,3,4,\dots$$

– n asteen särövaimennus:

$$A_n = -20 \log_{10} |d_n|$$

- **Kokonaissärökerroin**

$$d_{tot} = \sqrt{d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 + \dots}$$

28.11.2006

7

Särö

- Signaalin teho (Parsevalin teoreema)

$$\begin{aligned} P_y &= u_0^2 + \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{1}{2}u_3^2 + \frac{1}{2}u_4^2 + \frac{1}{2}u_5^2 + \dots \\ &= P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + \dots \end{aligned}$$

- Signaalin kokonaissärö voidaan määrittää kun tunnetaan lähtösignaalin kokonaisteho P_y , DC-komponentin teho P_0 sekä perustaajuuden teho P_1

$$d_{tot} = \sqrt{\frac{P_y - P_0 - P_1}{P_1}}$$

28.11.2006

8

Särö

- Kosinin potenssikaavat

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} 2 \binom{2n}{k} \cos(2(n-k)x) + \binom{2n}{n} \right]$$

$$\cos^{2n-1} x = \frac{1}{2^{2n-2}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} \cos(2n-2k-1)x \right]$$

- Sovelletaan summakaavoja lähtösignaaliin

$$\begin{aligned} y(t) = & a_0 + a_1 A \cos(2\pi f_x t) + a_2 A^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi \cdot 2 f_x t) \right) \\ & + a_3 A^3 \left(\frac{3}{4} \cos(2\pi f_x t) + \frac{1}{4} \cos(2\pi \cdot 3 f_x t) \right) \\ & + a_4 A^4 \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2\pi \cdot 2 f_x t) + \frac{1}{8} \cos(2\pi \cdot 4 f_x t) \right) \\ & + a_5 A^5 \left(\frac{5}{8} \cos(2\pi f_x t) + \frac{5}{16} \cos(2\pi \cdot 3 f_x t) + \frac{1}{16} \cos(2\pi \cdot 5 f_x t) \right) + \dots \end{aligned}$$

28.11.2006

9

Särö

- Ryhmitellään termit uudelleen harmoonisten yliaaltojen mukaan

$$\begin{aligned} = & \underbrace{\left(a_0 + \frac{1}{2} a_2 A^2 + \frac{3}{8} a_4 A^4 + \dots \right)}_{u_0} + \underbrace{\left(a_1 u + \frac{3}{4} a_3 u^3 + \frac{5}{8} a_5 A^5 + \dots \right)}_{u_1} \cos(2\pi f_x t) \\ & + \underbrace{\left(\frac{1}{2} a_2 A^2 + \frac{1}{2} a_4 A^4 + \dots \right)}_{u_3} \cos(2\pi \cdot 2 f_x t) \\ & + \underbrace{\left(\frac{1}{4} a_3 A^3 + \frac{5}{16} a_5 A^5 + \dots \right)}_{u_4} \cos(2\pi \cdot 3 f_x t) \\ & + \underbrace{\left(\frac{1}{8} a_4 A^4 + \dots \right)}_{u_5} \cos(2\pi \cdot 4 f_x t) + \left(\frac{1}{16} a_5 u^5 + \dots \right) \cos(2\pi \cdot 5 f_x t) + \dots \end{aligned}$$

28.11.2006

10

Särö

- Särökertoimiksi saadaan

$$d_2 = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\left(\frac{1}{2}a_2A^2 + \frac{1}{2}a_4A^4 + \dots\right)}{\left(a_1A + \frac{3}{4}a_3A^3 + \frac{5}{8}a_5A^5 + \dots\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2}a_2A + \frac{1}{2}a_4A^3 + \dots\right)}{\left(a_1 + \frac{3}{4}a_3A^2 + \frac{5}{8}a_5A^4 + \dots\right)}$$

$$d_3 = \frac{u_3}{u_1} = \frac{\left(\frac{1}{4}a_3A^3 + \frac{5}{16}a_5A^5 + \dots\right)}{\left(a_1A + \frac{3}{4}a_3A^3 + \frac{5}{8}a_5A^5 + \dots\right)} = \frac{\left(\frac{1}{4}a_3A^2 + \frac{5}{16}a_5A^4 + \dots\right)}{\left(a_1 + \frac{3}{4}a_3A^2 + \frac{5}{8}a_5A^4 + \dots\right)}$$

$$d_4 = \frac{u_4}{u_1} = \frac{\left(\frac{1}{8}a_4A^4 + \dots\right)}{\left(a_1A + \frac{3}{4}a_3A^3 + \frac{5}{8}a_5A^5 + \dots\right)} = \frac{\left(\frac{1}{8}a_4A^3 + \dots\right)}{\left(a_1 + \frac{3}{4}a_3A^2 + \frac{5}{8}a_5A^4 + \dots\right)}$$

$$d_5 = \frac{\left(\frac{1}{16}a_5A^5 + \dots\right)}{\left(a_1A + \frac{3}{4}a_3A^3 + \frac{5}{8}a_5A^5 + \dots\right)} = \frac{\left(\frac{1}{16}a_5A^4 + \dots\right)}{\left(a_1 + \frac{3}{4}a_3A^2 + \frac{5}{8}a_5A^4 + \dots\right)}$$

28.11.2006

11

Epälineaarisuus

- Jos $A \ll 1$ tai $a_n \ll a_1$, niin särökertoimeksi saadaan

$$d_n \approx \frac{a_n}{2^{n-1}a_1} A^{n-1}$$

ja särövaimennukseksi

$$A_n = -20 \log(d_n) \\ \approx 20 \log\left(\frac{2^{n-1}a_1}{a_n u^{n-1}}\right) = 20 \log\left(\frac{a_1}{a_n}\right) + (n-1) \cdot 3,01 - (n-1) \cdot 20 \log(u)$$

± 1 dB:n tulotasoon ($20 \log_{10}(A)$) $\Rightarrow \mp 1$ dB särövaimennus

28.11.2006

12

Esimerkki

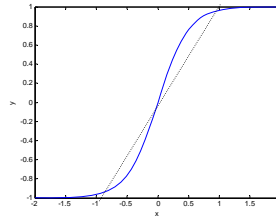
- Saturaatio

$$y(t) = f(x(t))$$

$$f(x(t)) = \tanh(ax(t))$$

$$f(x) \approx ax - \frac{a^3}{3}x^3 + \frac{2a^5}{15}x^5 - \frac{17a^7}{315}x^7 + \dots$$

$$= a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + \dots \quad |ax| \leq \frac{\pi}{2}$$



- Tarkastellaan tulosignaalia

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

- Särökertoimet kun $a=2$ ja $A=1$

$$d_{2n} = 0$$

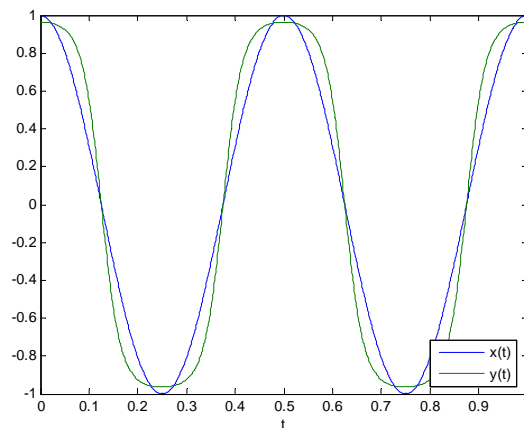
$$d_n \approx \frac{a_n}{2^{n-1} a_1} A^{n-1}$$

$$d_3 \approx -0.3333 \quad d_5 \approx 0.0133 \quad d_7 \approx -0.0540 \quad d_9 \approx 0.0219 \quad d_{11} \approx -0.0089$$

$$28.11.2006 \quad -9.5 \text{ dB} \quad -37 \text{ dB} \quad -25 \text{ dB} \quad -33 \text{ dB} \quad -41 \text{ dB}$$

13

Esimerkki



28.11.2006

14

Epälineaarisuus

- Traveling Wave Tube TWT tehovahvistin

Alkuperäinen signaali

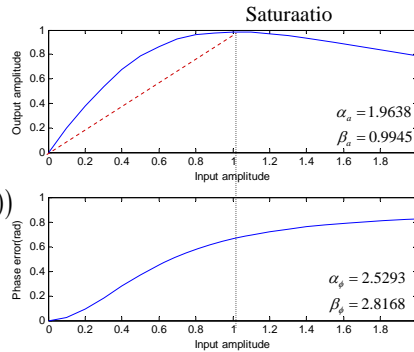
$$x(t) = r(t) \cos(\omega_c t + \phi)$$

TWT-vahvistimen ulostulo

$$y(t) = A(r(t)) \cos(\omega_c t + \phi + \Phi(r(t)))$$

$$A(r) = \frac{\alpha_a r}{1 + \beta_a r^2}$$

$$\Phi(r) = \frac{\alpha_\phi r^2}{1 + \beta_\phi r^2}$$



Amplitudista riippuva vaiheensiirto

28.11.2006

15

Keskeismodulaatiosärö

- Keskeismodulaatiosäröä syntyy epälineaarisessa järjestelmässä, kun tulosignaali on kahden tai useamman sinisignaalin summa.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

- Lähtösignaali on muotoa

$$y(t) = f(x(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x_1(t) + x_2(t))^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} a_k x_1^{k-n}(t) x_2^n(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_2^k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{n \neq k \\ n \neq 0}} \binom{k}{n} a_k x_1^{k-n}(t) x_2^n(t)$$

28.11.2006

x_1 ja sen harmooniset yliaallot

x_2 ja sen harmooniset yliaallot

Sekoittuneet signaalit

16

Keskeismodulaatiosärö

- Tarkastellaan epälinearisuutta $y(t) = x^2(t)$
- Tulosignaali
 $x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t)$ $x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t)$ $\omega_1 > \omega_2$
 $x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)$
- Lähtösignaali
 $y(t) = A_1 \cos^2(\omega_1 t) + A_2 \cos^2(\omega_2 t) + A_1 A_2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t)$

$$\cos(\phi_1) \cos(\phi_2) = \frac{1}{2} (\cos(\phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2))$$

$$y(t) = \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{2} A_1 \cos(2\omega_1 t) + \frac{1}{2} A_2 + \frac{1}{2} A_2 \cos(2\omega_2 t) \\ + \frac{1}{2} A_1 A_2 \cos((\omega_1 + \omega_2)t) + \frac{1}{2} A_1 A_2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t)$$

28.11.2006

17

Keskeismodulaatiosärö

- Tarkastellaan tapausta, jossa $A_1 = A_2 = A$
 $y(t) = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A \cos(2\omega_1 t) + \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A \cos(2\omega_2 t) \\ + \frac{1}{2} A^2 \cos((\omega_1 + \omega_2)t) + \frac{1}{2} A^2 \cos((\omega_1 - \omega_2)t)$
- Verrataan samanasteiset harmoniset yliaaltojen ja keskeismodulaatitulosien amplitudeja

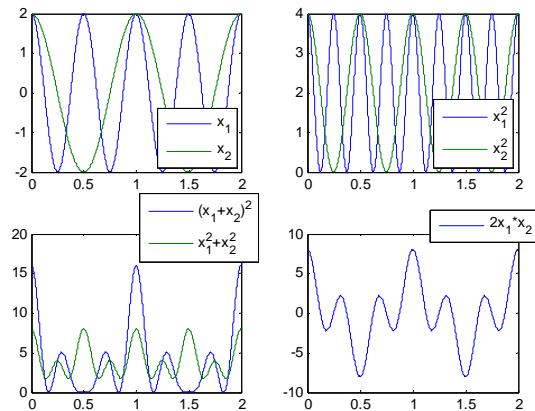
$$\frac{\frac{1}{2} A^2}{\frac{1}{2} A} = A$$

jos $A > 1$, niin keskinäismodulaatio komponentit ovat vastaavia 2. kertaluvun harmonisia taajuuksia suurempia

28.11.2006

18

Keskeismodulaatiosärö



28.11.2006

19

Keskeismodulaatiosärö

- Kahden kosini-signaalin kulkiessa n . asteen epälinearisuuden läpi syntyy sekoitustaajuuksia

$$f_{x_{keskeis}} = |lf_{x_1} + mf_{x_2}| \quad |l| + |m| = n$$

f_{x_1} Tulosignaalin $x_1(t)$ taajuus

f_{x_2} Tulosignaalin $x_2(t)$ taajuus

28.11.2006

20