**S-72.1110 Signaalit ja järjestelmät**
Tentti 20.12.2006

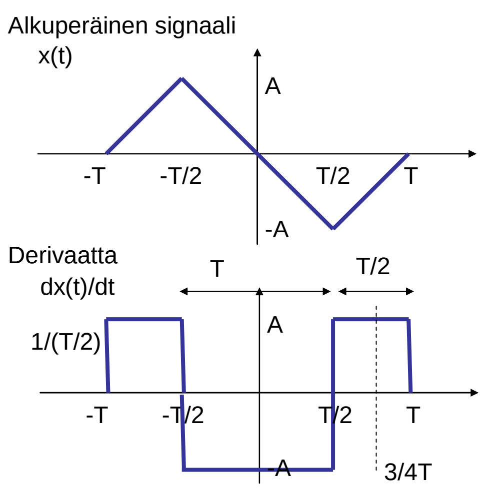
**Tarkistetut ja muutetut kohdat 18.12.2007:**

1.
Vastaa lyhyesti seuraaviin osatehtäviin, käytä tarvittaessa kuvaa.
c) Mikä on lineaarisen suodattimen ryhmäkulkuaikaviive?
t_g=1/(2π) d/dt ϕ(t), ϕ(t)=-arg{H(f)}

**pitää olla:** t_g=1/(2π) d/df ϕ(f), ϕ(t)=-arg{H(f)}
(t :n paikalle f)

2.

b) Johda Fourier-muunnos kuvan 2. mukaisella pulssille (6 p)




$$\Pi(t)=\begin{cases}1 & |t|\le \frac{1}{2}\\ 0 & |t|>\frac{1}{2}\end{cases}$$

Derivaatta koostuu pulsseista

$$\dot{x}(t)=A\frac{1}{\frac{T}{2}}\left(\Pi\left(\frac{t-\frac{3}{4}T}{\frac{T}{2}}\right)-\Pi\left(\frac{t}{T}\right)+\Pi\left(\frac{t-\frac{3}{4}T}{\frac{T}{2}}\right)\right)$$

Pitää olla: $\hat{x}=A\frac{1}{\frac{T}{2}}\left(\Pi\left(\frac{t+\frac{3}{4}T}{\frac{T}{2}}\right)-\Pi\left(\frac{t}{T}\right)+\Pi\left(\frac{t-\frac{3}{4}T}{\frac{T}{2}}\right)\right)$

(Ensimmäisen pulssin aikaviipe on +-merkkinen).

$\boxed{F\left\{x(t-\lambda)\right\} = X(f)e^{-i2\pi f\lambda}}$ Viipeen Fourier muunnos

Käyttämällä viipeen ja pulsiin derivaatan lausekkeita saadaan

$$F\left\{\dot{x}(t)\right\} = \frac{A}{\frac{T}{2}} F\left\{\left(\Pi\left(\frac{t+\frac{3}{4}T}{\frac{T}{2}}\right) - \Pi\left(\frac{t}{T}\right) + \Pi\left(\frac{t-\frac{3}{4}T}{\frac{T}{2}}\right)\right)\right\}$$

$$= \frac{A}{\frac{T}{2}}\left(\frac{\mathrm{T}}{2}\mathrm{sinc}\left(\pi f\frac{T}{2}\right)e^{i2\pi\frac{3}{4}T} - T\mathrm{sinc}\left(\pi fT\right) + \frac{T}{2}\mathrm{sinc}\left(\pi f\frac{T}{2}\right)e^{-i2\pi\frac{3}{4}T}\right)$$

$$= 2A\mathrm{sinc}\left(\pi f\frac{T}{4}\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi fT\right) - 2A\mathrm{sinc}\left(\pi fT\right)$$

Derivoimiskeino

$$\boxed{\begin{aligned} &F\left\{\dot{x}(t)\right\} = i2\pi fX(f) \\ &X(f) = \frac{1}{i2\pi f}F\left\{\dot{x}(t)\right\} \end{aligned}}$$

$$F\left\{x(t)\right\} = -i\frac{A}{\pi f}\left(\mathrm{sinc}\left(\pi\frac{T}{2}\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi fT\right) - \mathrm{sinc}\left(\pi T\right)\right)$$

**Pitää olla:**

$$F\left(\hat{x}(t)\right) = A\frac{1}{\frac{T}{2}}F\left(\Pi\left(\frac{t+\frac{3}{4}T}{\frac{T}{2}}\right) - \Pi\left(\frac{t}{T}\right) + \Pi\left(\frac{t-\frac{3}{4}T}{\frac{T}{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{A}{\frac{T}{2}}\left(\frac{T}{2}\sin c\left(f\frac{T}{2}\right)e^{j2\pi f\frac{3}{4}T} - T\sin c\left(fT\right) + \frac{T}{2}\sin c\left(f\frac{T}{2}\right)e^{-j2\pi f\frac{3}{4}T}\right)$$

$$= 2A\sin c\left(f\frac{T}{2}\right)\cdot\cos\left(2\pi f\frac{3}{4}t\right) - A\sin c\left(fT\right)$$

$\mathit{Derivoimiskeino: Jaetaan\ derivoidun\ signaalin\ F-muunnos\ } j2\pi f \mathit{:llä} \rightarrow$

$$F\left(x(t)\right) = -j\frac{A}{\pi f}\left(\sin c\left(f\frac{T}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi ft\right) - \frac{1}{2}\sin c\left(fT\right)\right)$$

(Laskettu uudestaan)

3.
Kuva 3a esittää sisäisen mallin säätöjärjestelmän lohkokaaviota.
a) Ratkaise siirtofunktio Y(f)/X(f) (3 p)

b) Ratkaise C siten, että kuvien 3a ja 3b järjestelmien siirtofunktioista tulee samat. (3 p)

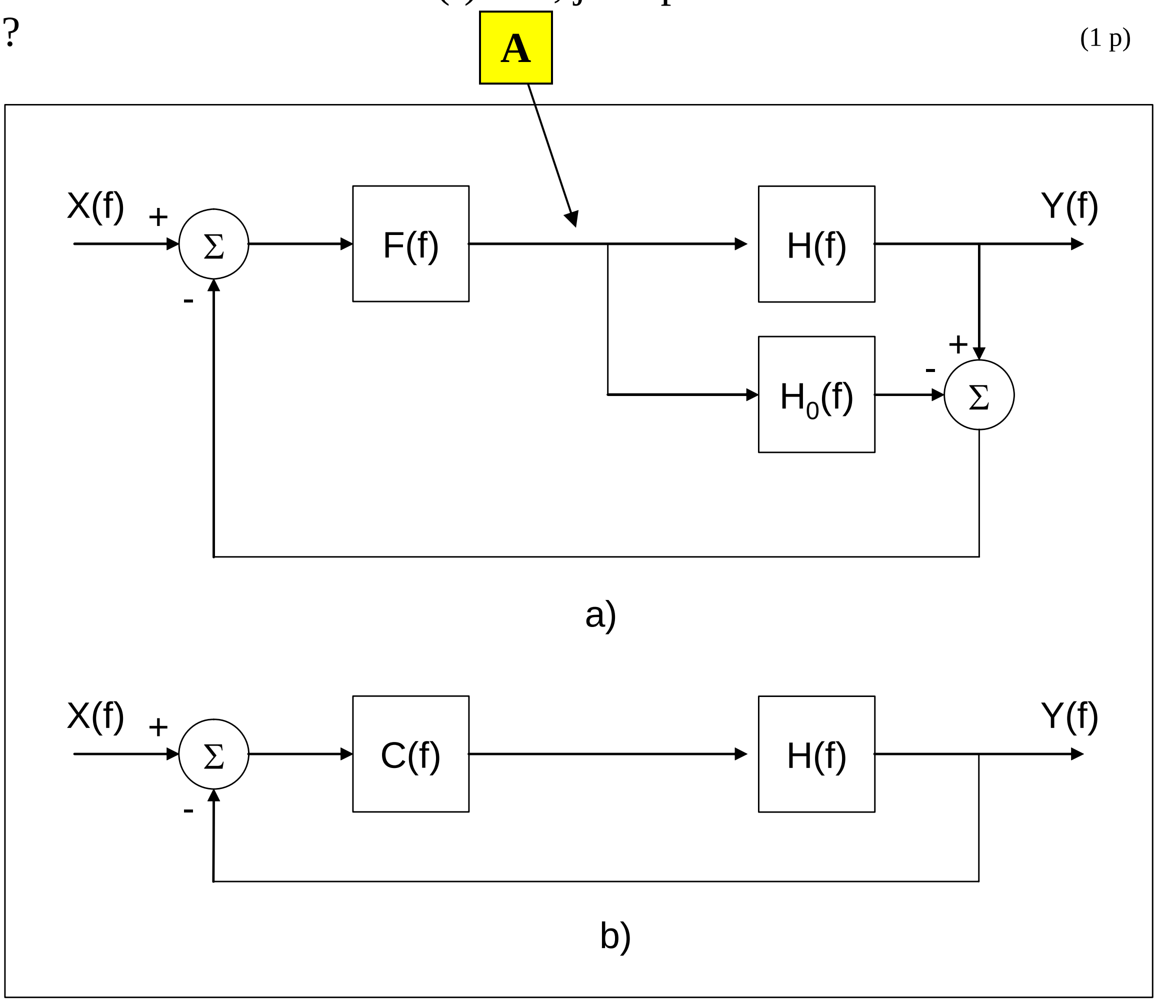
c) Tarkastellaan tapausta, jossa (3 p)

$$H(f) = H_0(f) = \frac{1}{i2\pi f}$$

$$F(f) = \frac{i2\pi f}{1 + i2\pi f \tau}$$

Ratkaise säätimen C(f) siirtofunktio sekä prosessin siirtofunktio Y(f)/X(f).

d) Mikä tulee siirtofunktion F(f) olla, jotta prosessin siirtofunktioksi tulisi G(f)? (1 p)




**Kuva 3.**

a) ja b)

”Brutaalimpi” tapa laskea järjestelmän siirtofunktio:
Merkitään järjestelmään välimuuttujia, esim. A, B jne. -> merkitty edelliseen kuvaan A!

Todetaan, että

$A = (X(f)-(Y(f)-AH_0(f)))F(f)$

Todetaan, että $Y(f) = AH(f)$

$X(f)F(f)-Y(f)F(f)+AH_0(f)F(f) = A$ ->

$A = (X(f)F(f)-Y(f)F(f))/(1- H_0(f)F(f))$ ->

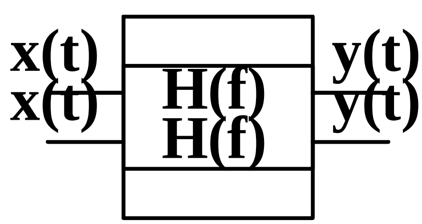
$Y(f)(1- H_0(f)F(f))= (X(f)F(f)-Y(f)F(f))H(f)$ ->

$Y(f)( 1- H_0(f)F(f)+ F(f))H(f))= X(f)F(f) H(f)$ ->

$Y(f)/X(f) = (F(f) H(f))/ ( 1- H_0(f)F(f)+ F(f))H(f))$

Kyse on siis välimuuttujien käytöstä ja sitten niiden eliminoinneista.

4.
4.

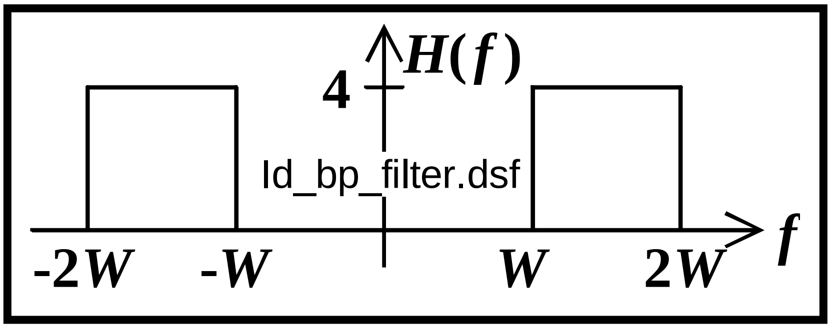



a) Esitä 0-keskiarvoisen stationaarisen satunnaissignaalin x(t) keskimääräisen tehon lauseke tehospektrin $\Phi_X(f)$ avulla. (2 p)

$$E\left\{\left|x(t)\right|^2\right\} = \phi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(f)df$$

**Pitää olla: …** tehon lauseke tehospektrin $\Phi_{XX}(f)$ avulla. (2 p)
(Alaindeksiin yksi x lisää)

c) Suodatin on ideaalinen kaistanpäästösuodatin jonka siirtofunktio esitetään oheisessa kuvassa. Kuinka suuri on lähtösignaalin y(t) keskimääräinen teho, kun $\Phi_{XX}(f)=P_O/2W$. (4 p)




**Kuva 4.**

$$E\left\{|y(t)|^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{yy}(f)df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \Phi_{xx}(f)df$$

$$= \int_{-2W}^{-W} |1|^2 \frac{P_0}{2W} df + \int_{W}^{2W} |1|^2 \frac{P_0}{2W} df$$

$$= \frac{P_0}{2W}(-W-(-2W)) + \frac{P_0}{2W}(2W-W)$$

$$= P_0$$

**Pitää olla:**

...

$$\int_{-2W}^{-W} |4|^2 \frac{P_0}{2W} df + \int_{W}^{2W} |4|^2 \frac{P_0}{2W} df$$

$$= \frac{16P_0}{2W}(-W-(-2W)) + \frac{16P_0}{2W}(2W-W)$$

$$= 16P_0$$

(H(f):n itseisarvo on 4, joka on huomioitu laskuissa)

5.

Oskillaattori generoi säröisen sinisignaalin, jonka lauseke on $x(t) = \sin(2\pi \cdot f_x t) + 0{,}06\sin(2\pi \cdot 2 f_x t) + 0{,}08\sin(2\pi \cdot 3 f_x t)$ . Signaalin säröä vaimennetaan 4. asteen Butterworth-suodattimella, jonka amplitudifunktio on $A(f) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(f/f_x\right)^8}}$.

a) Laske suodattamattoman signaalin kokonaissärökerroin. (4 p)

$$x(t) = u_1 \sin\left(2\pi\cdot f_x t\right) + u_2 \sin\left(2\pi\cdot 2 f_x t\right) + u_3 \sin\left(2\pi\cdot 3 f_x t\right)$$

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 0,06$$

$$u_3 = 0,08$$

$$d_2 = \frac{u_2}{u_1} = 0,06$$

$$d_3 = \frac{u_3}{u_1} = 0,08$$

$$d_{tot} = \sqrt{{d_2}^2 + {d_3}^2} = \sqrt{0,06^2 + 0,08^2} = 0,1$$

b) Laske suodatuksen jälkeisen signaalin perustaajuisen komponentin ja harmonisten komponenttien amplitudit. (4 p)

c) Laske suodatetun signaalin kokonaissärökerroin. (2 p)

$$A(f_x) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(f_x/f_x\right)^8}} = 1$$

$$A(2f_x) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(2f_x/f_x\right)^8}} = \frac{1}{\sqrt{257}}$$

$$A(3f_x) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(3f_x/f_x\right)^8}} = \frac{1}{\sqrt{6562}}$$

$$d_2 = \frac{A(2f_x)u_2}{A(f_x)u_1} = 0,06\frac{1}{\sqrt{257}} \approx$$

$$d_3 = \frac{A(3f_x)u_3}{A(f_x)u_1} = 0,08\frac{1}{\sqrt{6562}}$$

$$d_{tot} = \sqrt{{d_2}^2 + {d_3}^2} = \sqrt{0,06^2\frac{1}{257} + 0,08^2\frac{1}{6562}} \approx 0.0039$$

**Pitää olla:**

$$A(f_x) = \frac{1}{\sqrt{1+(f_x/f_x)^8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

...

$$d_2 = \frac{A(2f_x)u_2}{A(f_x)u_1} = 0,06\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{257}} \approx 0,00529297$$

$$d_3 = \frac{A(3f_x)u_3}{A(f_x)u_1} = 0,08\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6562}} \approx 0,00139665$$

$$d_{tot} = \sqrt{d_2^2 + d_3^2} \approx 0,005474$$

(Perustaajuinen signaali vaimenee myös suodattimessa).

Parannus desibeleinä on $20 \cdot \lg\left(\frac{0,1}{0,0054741}\right) \approx 25,2\ dB$