## S.72.1110 Signaalit ja järjestelmät — Tentti 15.5.2006
## S-72.060 Signaalit ja järjestelmät

Vastaa tehtävään 1, tehtävistä 2 – 7 otetaan huomioon neljä parhaiten suoritettua tehtävää.

1. Vastaa lyhyesti seuraaviin osatehtäviin, käytä tarvittaessa kuvaa.

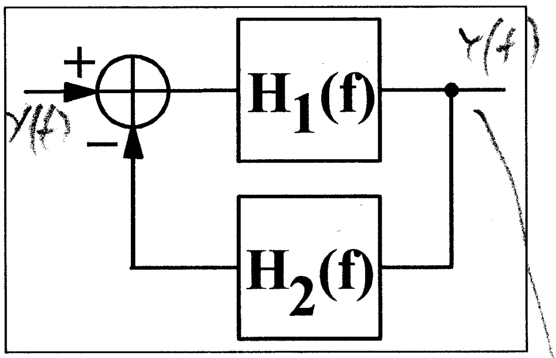
a) Miten kuvaisit diskreetti-amplitudista ja diskreetti-aikaista signaalia?

b) Esitä signaalin energian lauseke sen Fourier-muunnoksen $X(f)$ avulla

c) Mikä on seuraavan operaation tulos: $\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\cdot\delta(u-t)du$?

d) DFT:lla tutkitaan signaalin spektri taajuusalueella 0…20,48 kHz käyttäen 1024 näytettä. Kuinka suuri on näyteväli aika- ja taajuusalueessa?.

e) Esitä oheisen, negatiivisesti takaisinkytketyn järjestelmän siirtofunktio kuvassa annettujen siirtofunktioiden avulla.




f) GSM1800 käsipuhelimen herkkyys on –100 dBm. Mitä antenniliittimeen tulevaa tehoa (W) tämä vastaa?

g) Miten määritellään epälineaarisen järjestelmän 1 dB:n kompressiotaso?

h) Miten lasketaan f(x):n keskiarvo, kun tunnetaan tiheysfunktio p(x)?

i) Piirrä 8PSK-signaalin konstellaatiokuvio.

j) Selitä kvantisointivirheen syntymistä (missä ja miten).

Vastaukset

a) Saa vain tiettyjä amplitudiarvoja tietyillä ajan hetkillä

b) $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$ c) $x(t)$

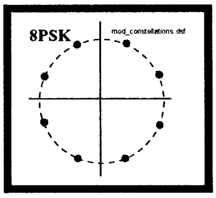
d) $T_s = 1/40960 \text{ s} = 24,4140625\ \mu\text{s}, f_s = 40960/1024 = 40 \text{ Hz}$

e) $H(f) = \dfrac{H_1(f)}{1+H_1(f)H_2(f)}$ f) $10^{-13}$ W

g) Se lähtötaso, joka on 1 dB pienempi kuin lineaarinen käyttäytyminen edellyttäisi

h) $E\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx$

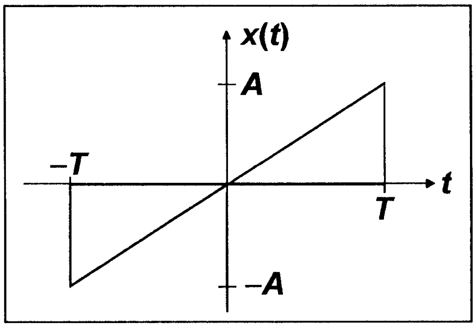
i) ----------------------------------→




j) Kvantisointi virhe syntyy A/D-muunnoksessa, koska kvantisoitu signaali voi saada vain tiettyjä amplitudiarvoja

2. Johda oheisen signaalin

$$x(t) = A\frac{t}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$ Fourier-muunnos.



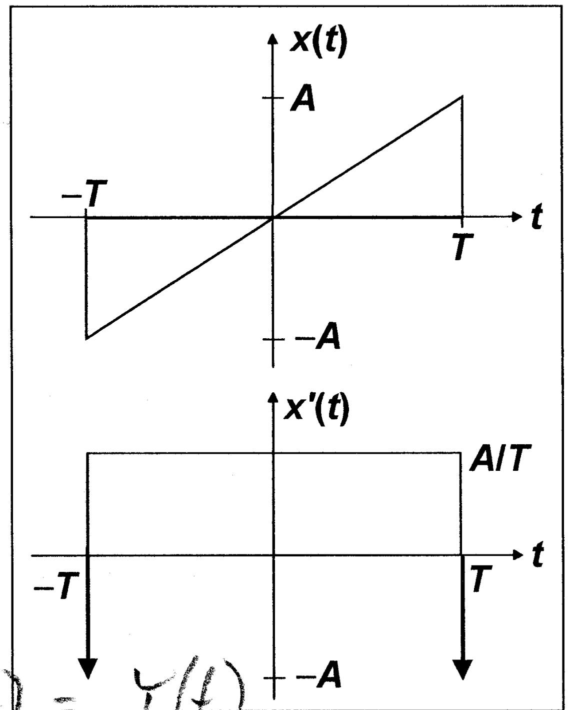

RATKAISU

$$x'(t) = -A\delta(t+T) + \frac{A}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{\mathrm{t}}{2\mathrm{T}}\right) - A\delta(t-T)$$

$$F\{x'(t)\} = -Ae^{j2\pi fT} + \frac{2\cdot A}{T}T\,\mathrm{sinc}(2fT) - Ae^{-j2\pi fT}$$

$$= 2A\,\mathrm{sinc}(2fT) - 2A\cos(2\pi fT)$$

$$X(f) = \frac{F\{x'(t)\}}{j2\pi f} = \frac{\cancel{2}A\,\mathrm{sinc}(2fT) - \cancel{2}A\cos(2\pi fT)}{j\cancel{2}\pi f}$$




Arvostelu:
jokin järkevä idea spektrin laskemiseksi, 2p
derivointi ok, 3p, jos impulssifunktiot puuttuvat tai jompikumpi väärinpäin –1p
derivaatan muunnos ok, 2p
derivointikeinon oikea soveltaminen, 2p
oikea lopputulos, 1p

$$[X(f) - H_2(f)\cdot Y(f)]\cdot H_1(f) = Y(f)$$

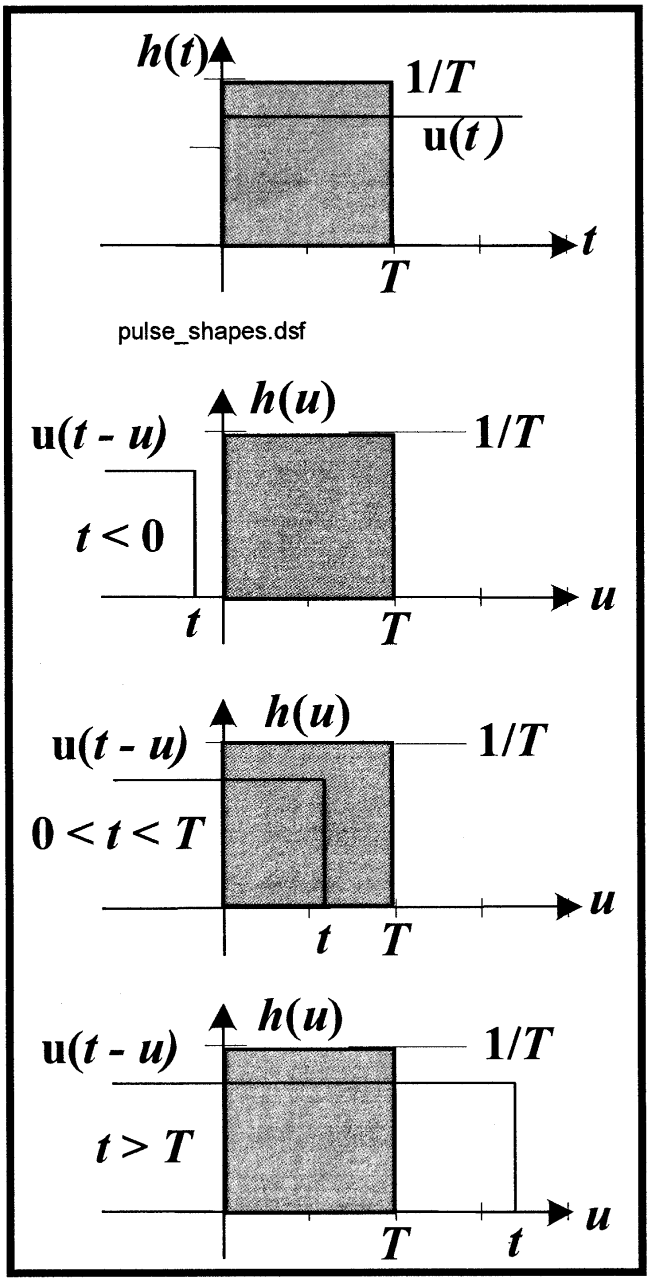
$$H_1\cdot X - H_2\cdot Y\cdot H_1 = Y$$

$$H_1 X = Y(1 + H_1 H_2) \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{H_1}{1+H_1 H_2}$$

3. Ns. keskiarvosuodattimen impulssi-vaste on $h(t) = \frac{1}{T} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{t - 0.5T}{T}\right)$

Johda graafisella konvoluutiolla vaste yksikköaskelsignaalille u($t$).

RATKAISU




$t < 0$

$$h(t) \otimes \mathrm{u}(t) = \int_0^0 \frac{1}{T} \cdot 1 dt = 0$$

$0 < t < T$

$$h(t) \otimes \mathrm{u}(t) = \int_0^t \frac{1}{T} \cdot 1 dt = \frac{t}{T}$$

$t > T$

$$h(t) \otimes \mathrm{u}(t) = \int_0^T \frac{1}{T} \cdot 1 dt = 1$$

Arvostelu:

- toinen käännetty, 2p
- kolme tapausta, 2p
- konvoluutiointegraali ok, 2p
- rajat oikein, 2p
- lopputulos ok, 2p

4. Siniaaltogeneraattorin lähtösignaali on $x(t) = \sin(2\pi f_x t) - 0{,}1\sin(2\pi \cdot 3 f_x t)$

a) Laske generaattorin kokonaissärökerroin.

b) Säröä vaimennetaan Butterworth-suodattimella, jonka amplitudivaste on $A(f) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(f/1{,}25 f_x)^{2n}}}$. Määrää tarvittava kertaluku n, jotta kokonaissärökerroin olisi korkeintaan 0,01. Laske myös kokonaissärökerroin suodattimen jälkeen.

RATKAISU

a) $d_{tot} = d_3 = |u_3/u_1| = 0.1$

b)

$$A(f_x) = \frac{1}{\sqrt{1+(f_x/1{,}25 f_x)^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+(0{,}8)^{2n}}}$$

$$A(3f_x) = \frac{1}{\sqrt{1+(3f_x/1{,}25 f_x)^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+(2{,}4)^{2n}}}$$

$$d_{tot} = d_3 = \left|\frac{u_3}{u_1}\right| = \left|\frac{A(3f_x)\cdot 0{,}1}{A(f_x)\cdot 1}\right| = 0{,}01 \rightarrow \frac{A(3f_x)}{A(f_x)} = 0{,}1$$

$$\rightarrow \frac{1+5{,}76^n}{1+0{,}64^n} \geq 100$$

Kokeilemalla:

$$n = 1 \rightarrow 4{,}12 \quad n = 2 \rightarrow 24{,}25 \quad n = 3 \rightarrow 152{,}20$$

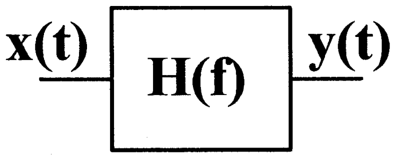
$$d_{tot} = d_3 = \left|\frac{u_3}{u_1}\right| = \left|\frac{A(3f_x)\cdot 0{,}1}{A(f_x)\cdot 1}\right| = \rightarrow \frac{\sqrt{(1+0{,}64^3)}\cdot 0{,}1}{\sqrt{1+5{,}76^3}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{152{,}20}}$$

$$= 0{,}008106$$

a) 3p

b) vaimennukset perus- ja harmonisella taajuudella 2p
kokonaissärökertoimen lauseke suodattimen jälkeen 2p
$n$ oikein 2p
$d_{tot}$ oikein 1p

5.




a. Esitä 0-keskiarvoisen satunnaissignaalin x(t) keskimääräisen tehon lauseke tehospektrin $S_X(f)$ avulla.

b. Esitä lineaarisesti suodatetun satunnaissignaalin y(t) tehospektri x(t):n tehospektrin ja suodattimen siirtofunktion avulla.

c. Kuinka suuri on suodatetun signaalin kaistanleveys, kun tämä määritellään sinä kaistanleveytenä, johon tulee 99 % kokonaistehosta, ja käytetään RC-alipäästösuodatinta, jonka siirtofunktio on $H(f)=\dfrac{1}{1+j(f/B)}$. $S_X(f)=P_O/2W$. Integraali!

RATKAISU

a) $$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df$$

b) $$S_y(f)=|H(f)|^2 S_x(f)$$

c) $$P_y = N_o \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+f^2/B^2)} df = N_o B \Big|_0^{\infty} \arctan x = N_o B \frac{\pi}{2}$$

$$P_{yB} = N_o \int_0^{B_{99}/B} \frac{1}{(1+f^2/B^2)} df = N_o B \Big|_0^{B_{99}/B} \arctan x = N_o B \arctan\left(\frac{B_{99}}{B}\right)$$

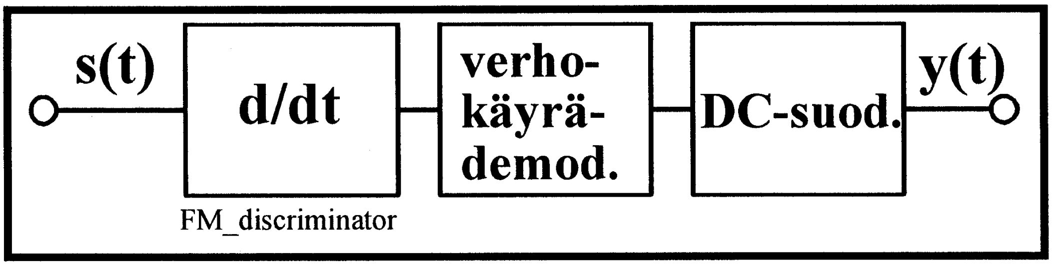
$$\frac{P_{yB_{99}}}{P_y} = \frac{N_o B \arctan\left(\frac{B_{99}}{B}\right)}{N_o B \frac{\pi}{2}} = 0{,}99 \rightarrow \arctan\left(\frac{B_{99}}{B}\right) = 0{,}99\frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow B_{99} = B\tan\left(0{,}99\frac{\pi}{2}\right) = 63{,}66B$$

a) 2p, b) 2p

c) kokonaisteho 2p, 99%:n teho 2p, $B_{99}$ oikein 2p

6.




a) Osoita, että kuvan kytkentä voi toimi FM-ilmaisimena, FM-signaalin lauseke on $s_{FM}(t) = \cos\left(2\pi f_c t + \int_{-\infty}^{t} 2\pi\Delta f x(u)du\right)$.

b) Mikä on lähtösignaalin lauseke, kun tulosignaali on puhdas AM-signaali, $s_{AM}(t) = (1 + mx(t))\cos(2\pi f_c t)$, jossa $mx(t) \ll 1$?

RATKAISU

a)

$$\frac{d}{dt}s_{FM}(t) = \frac{d}{dt}\cos\left(2\pi f_c t + \int_{-\infty}^{t} 2\pi\Delta f x(u)du\right)$$

$$= -(2\pi f_c + 2\pi\Delta f x(t))\sin\left(2\pi f_c t + \int_{-\infty}^{t} 2\pi\Delta f x(u)du\right)$$

verhokäyrä on $a(t) = \left|-(2\pi f_c + 2\pi\Delta f x(t))\right| = 2\pi f_c + 2\pi\Delta f x(t)$

tasavirtakomponentin poistamisen jälkeen on $y(t) = 2\pi\Delta f\, x(t)$, joka on verrannollinen moduloivan signaaliin, siten piiri toimi FM demodulaattorina.

b)

$$\frac{d}{dt}s_{AM}(t) = \frac{d}{dt}(1 + mx(t))\cos(2\pi f_c t)$$

$$= mx'(t)\cos(2\pi f_c t) - (1 + mx(t))2\pi f \sin(2\pi f_c t)$$

$$= \sqrt{(mx'(t))^2 + ((1 + mx(t))2\pi f)^2}\,\cos(2\pi f_c t + \varphi(t))$$

Verhokäyrä on

$$a(t) = \sqrt{(mx'(t))^2 + ((1 + mx(t))2\pi f_c)^2}$$

$$= 2\pi f_c\sqrt{1 + 2mx(t) + m^2x^2(t) + (mx'(t))^2 / (2\pi f_c)^2}$$

$$\approx 2\pi f_c\left(1 + mx(t) + m^2x^2(t) + 0{,}5\,(mx'(t))^2 / (2\pi f_c)^2\right)$$

ja tasavirtakomponentin poistamisen jälkeen on

$$y(t) = 2\pi f_c m x(t) + 2\pi f_c m^2 x^2(t) + 0,5\,(m x'(t))^2 / 2\pi f_c$$

(siis epälineaarisesti vääristynyt versio moduloivasta signaalista)

a) b) derivaatta oikein 2p
verhokäyrä oikein 2p
dc-suodatettu lähtösignaali oikein 1p

7. Näytteenottojärjestelmän tulosignaali on kahden kosiniaallon summa, $x(t) = \cos(2\pi f_{x1}t) + 0,5\cos(2\pi f_{x2}t)$, jossa $f_{x1} = 1$ kHz, $f_{x2} = 6$ kHz, ja näytteenottotaajuus $f_s = 10$ kHz.

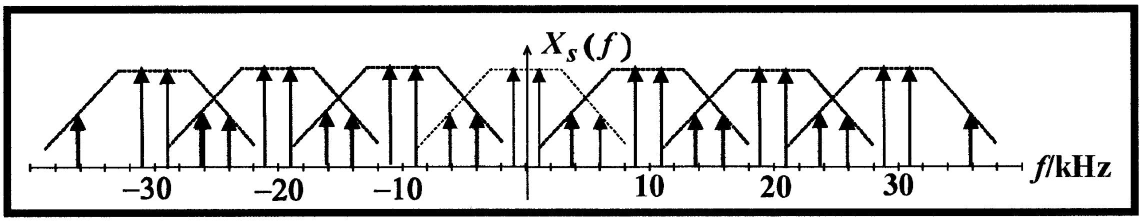
c) Hahmottele näytesignaalin $x_s(t)$ spektri taajuusalueella –30…+30 kHz olettaen näytteenotto ideaaliseksi.

b) Esitä ideaalisella alipäästösuodattimella (kaistanleveys 5 kHz) rekonstruoidun signaalin $\hat{x}(t)$ lauseke.

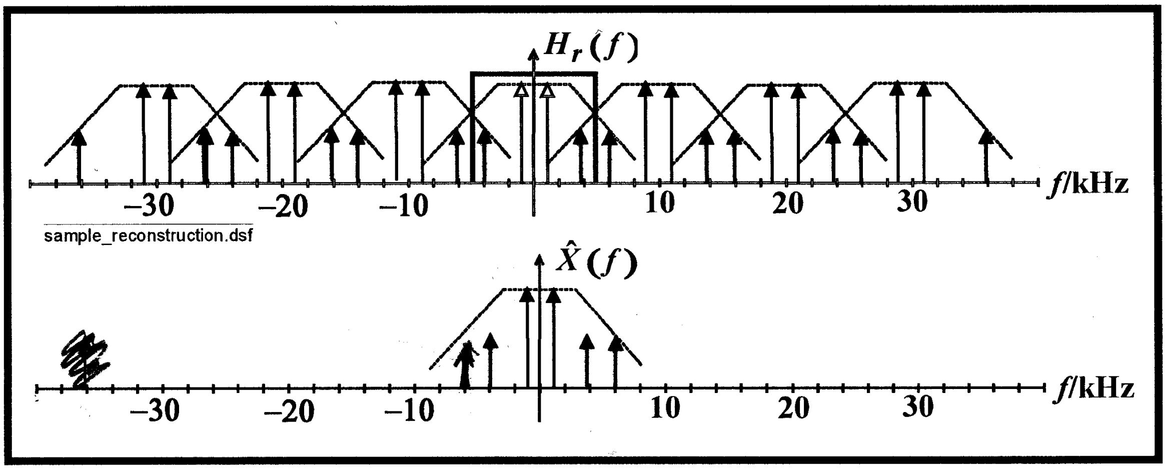
$\hat{x}(t)$ lauseke.

Malliratkaisu:

a)




b)




$$\hat{x}(t) = \cos(2\pi f_{x1}t) + 0,5\cos(2\pi(f_s - f_{x2})t) +$$
$$0,5\cos(2\pi f_{x2} t)$$

| |
|---|
| spektrin monistuminen näytteenotossa, 3p<br>kaikki viivat saatu oikein, 2p<br>alipäästösuodatuksen jättämät spektriviivat oikein, 2p<br>kahden kosinin tunnistaminen, 3p |