S-72.060 Signaalit ja järjestelmät, Tentti 13.5.2005

1. Vastaa lyhyesti seuraaviin osatehtäviin, käytä tarvittaessa kuvaa.

a) Mikä on kahden signaalin ortogonalisuuden (aikavälillä (0,T)) määritelmä?

V. $\int_T x(t)y^*(t)dt = 0$ or $\int_T x(t)y(t)dt = 0$

b) Signaalin yksikkö on V. Mikä on sen Fourier-muunnoksen yksikkö?

V. V/Hz tai Vs

c) Esitä jokin impulssifunktion määritelmä.

V. Diracin määritelmä $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t)dt = 1$

Raja-arvomääritelmä $\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t,\varepsilon)dt \right\} = 1 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \{x(t,\varepsilon)\} = \delta(t)$

d) DFT lasketaan 4096 signaalinäytteellä, jotka on otettu 1 ms välein. Mikä on näyteväli taajuus-alueessa?

V. $f_s = 1/T_o = 1/(4096 \cdot 0,001)s = 0,244140625 Hz$

e) Kanavan siirtofunktio on $H(f) = (1 + j2\pi fT)^{-1}$. Esitä kanavan amplitudi- ja vaihevaste.

V. $A(f) = |H(f)| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 f^2 T^2}}$, $\phi(f) = -\arg\{H(f)\} = -\tan^{-1}(-2\pi fT)$

f) Milloin kaksiporttijärjestelmä on lineaarinen ja kausaalinen?

V. lineaarisuus: $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \to y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$

Kausaalisuus: vaste ei voi alkaa ennen herätettä.

g) Milloin esiintyy järjestelmän lähdössä keskeismodulaatiosäröä

V. Epälineaarisessa järjestelmässä kahdella sinimuotoisella tulosignaalilla

h) Millä ehdolla kaksi satunnaissignaalinäytettä x ja y ovat tilastollisesti riippumattomia?

V. $p_{x,y}(x,y) = p_x(x)p_y(y)$

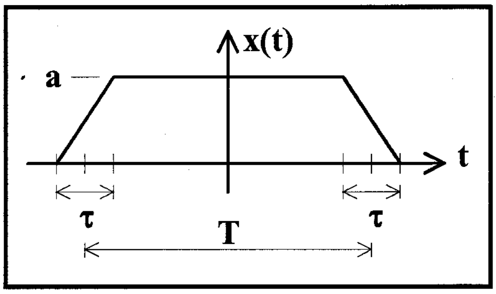
i) Mitä tarkoittavat lyhenteet PM ja FSK?

V. Vaihemodulaatio (Phase Modulation, taajuusavainnus (Freq. Shift Keying

j) Montako bittiä tarvitaan amplitudiarvojen esittämiseksi, jos signaalin A/D-muunnoksessa käytetään 1024 kvantisointitasoa?

V. 10 bittiä

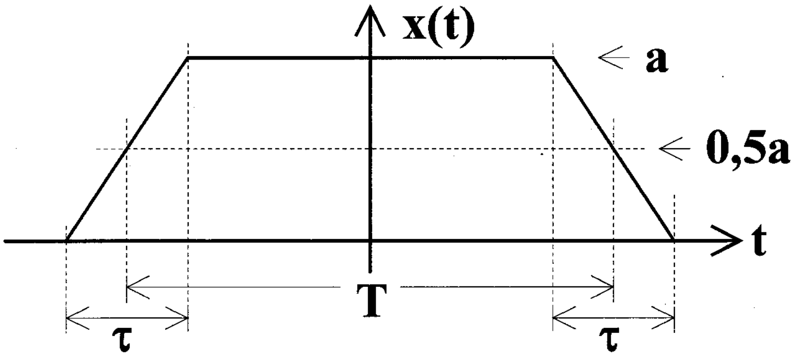
2. Laske oheisen trapetsimuotoisen pulssin Fourier-muunnos käyttäen muunnoksen ominaisuuksia. T on pulssin puolen amplitudin leveys.



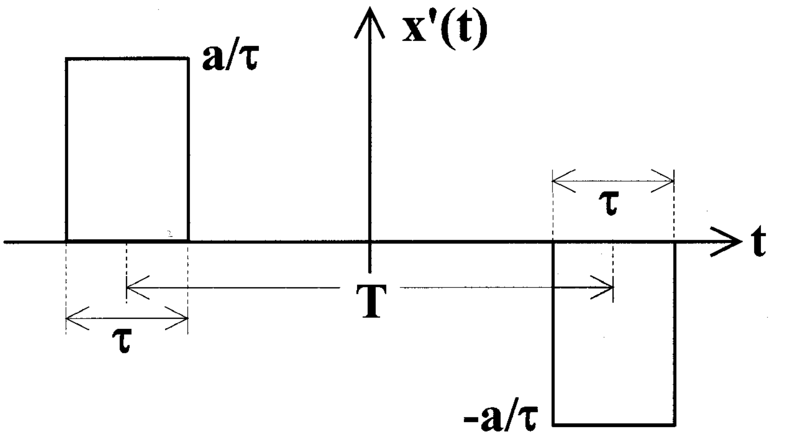
Ratkaisu

a)

Käyttäen derivointikeinoa on derivaatan F-muunnos



$$x'(t) = \frac{a}{\tau} rect\left(\frac{t+T/2}{\tau}\right) - \frac{a}{\tau} rect\left(\frac{t-T/2}{\tau}\right) \quad 3p$$



$$\mathcal{F}\{x'(t)\} = a \cdot \mathrm{sinc}(f\tau) \cdot \quad 1p$$

$$\left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right) \quad 2p$$

$$= j2a \cdot \mathrm{sinc}(f\tau)\sin(\pi fT)$$

Alkuperäisen pulssin F-muunnos on tällöin

$$X(f) = \frac{\mathcal{F}\{x'(t)\}}{j2\pi f} \quad 3p$$

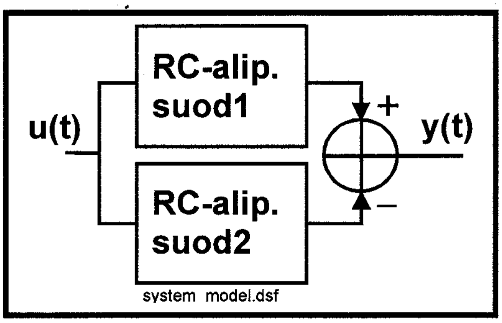
ok

$$= \frac{j2aT \cdot \mathrm{sinc}(f\tau)\sin(\pi fT)}{j2\pi fT} = aT\,\mathrm{sinc}(f\tau)\,\mathrm{sinc}(fT) \quad 1p$$

3. Lineaarisen järjestelmän lähtösignaali on kahden rinnakkaisen RC-alipäästösuodattimen lähtösignaalien erotus. Määrää graafisella konvoluutiolla järjestelmän askelvaste. Alipäästösuodattimien impulssivasteet ovat $h_1(t) = \dfrac{1}{T_1}\mathrm{e}^{-t/T_1}\,\mathrm{u}(t)$,

$$h_2(t) = \frac{1}{T_2}\mathrm{e}^{-t/T_2}\,\mathrm{u}(t), \quad T_1 \neq T_2, \text{ ja}$$

yksikköaskelfunktio $\mathrm{u}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

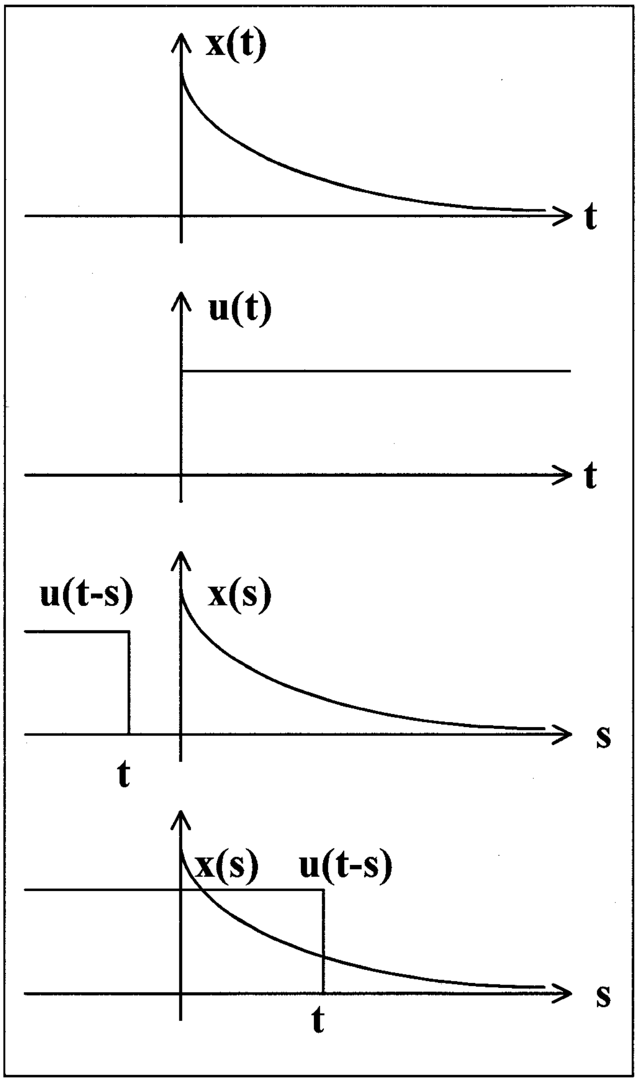


Ratkaisu

Lähtösignaali on kahden yksipuolisen eksponenttipulssin ja askelfunktion konvoluutioiden erotus. Yksipuolisen eksponenttipulssin ja askelfunktion konvoluutio saadaan seuraavasti

Kun t < 0, konvoloitavat signaalit eivät ole päällekkäisiä, ja y(t) = 0.

Kun t > 0, signaalien tulo eroaa nollasta s-välillä [0,t], ja konvoluutiotulos on



$$y(t) = \int_0^t \frac{\exp(-s/T)}{T}\,ds$$

$$= \Big|_0^t -\exp(-s/T)$$

$$= 1 - \exp(-t/T)$$

Lopputulos voidaan kirjoittaa muotoon

$$y_{erotus}(t) = \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)\right)\mathrm{u}(t) - \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{T2}\right)\right)\mathrm{u}(t)$$

$$= \left(\exp\left(-\frac{t}{T2}\right) - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)\right)\mathrm{u}(t)$$

konvoluutiointegraali OK 2p
käännetty signaali OK 2p
integraalirajat OK 2p
oikea tulos 2p
tilanne kun $t < 0$ eksplisiittisesti todettu 2p

4. Harmonista säröä tuottavan sinioskillaattorin lähtösignaali on
$x(t) = \sin(2\pi f_x t) - 0{,}02\sin(2\pi \cdot 2f_x t) + 0{,}05\sin(2\pi \cdot 3f_x t)$.

a) Laske oskillaattorin kokonaissärökerroin.

b) Särökomponentteja vaimennetaan neljännen asteen Butterworth-suodattimella, jonka amplitudivaste on $A(f) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(f/1{,}25f_x)^8}}$. Laske kokonaissärökerroin suodattimen jälkeen.

RATKAISU

a)

$$d_{tot} = \sqrt{d_2^2 + d_3^2} = \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}05^2} = \sqrt{0{,}0004 + 0{,}0025} = \sqrt{0{,}0029} = 0{,}05385$$

2p 1p

b) $$Y(f_x) = A(f_x)X(f_x) = \frac{1}{\sqrt{1+(f_x/1{,}25f_x)^8}} \cdot 1 \approx 0{,}92538$$ 2p

$$Y(2f_x) = A(2f_x)X(2f_x) = \frac{1}{\sqrt{1+(2f_x/1{,}25f_x)^8}} \cdot 0{,}02 \approx 0{,}0030168$$ 1p

$$Y(3f_x) = A(3f_x)X(3f_x) = \frac{1}{\sqrt{1+(3f_x/1{,}25f_x)^8}} \cdot 0{,}05 \approx 0{,}0015064$$ 1p

c) $$d_{tot} = \frac{\sqrt{0{,}0030168^2 + 0{,}0015064^2}}{\underline{0{,}92538}} \approx 0{,}0036439$$ 1p

2p

[redacted]

5 Vaaleanpunaisen kohinan tehospektri on $S_{pink-noise} = k/f$.

a) Esitä taajuusvälille $[f_1, f_2]$ osuvan kohinatehon integraalilauseke.

b) Osoita että oktaavikaistalle $(f_2 = 2f_1)$ osuva kohinateho on vakio

RATKAISU

a) $$P = \int_{f_1}^{f_2} \frac{k}{f} df = k \Big|_{f_1}^{f_2} \ln(f) = k\left(\ln(f_2) - \ln(f_1)\right) = k \ln\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

4p 2p

b) $$f_2 = 2f_1 \rightarrow P = k \ln\left(\frac{2f_1}{f_1}\right) = k \ln(2) = vakio$$

2p 2p

6. AM-järjestelmässä on kantoaalto on $c(t) = \cos(20000\pi t)$ ja moduloiva signaali $x(t) = \cos(2000\pi t) + \cos(6000\pi t)$.

a) Ilmoita modulaatioindeksin m arvot, joilla signaalin virheetön ilmaisu onnistuu ideaalisella verhokäyräilmaisimella.

b) Piirrä moduloidun signaalin spektri positiivisilla taajuuksilla. Merkitse kuvaan spektrikomponenttien amplitudit ja taajuudet.

RATKAISU

a) Sopivalla hetkellä kummankin kosini-signaalin amplitudi on -1, ja jotta ilmaisu onnistuisi ideaalisella verhokäyräilmaisimella on oltava

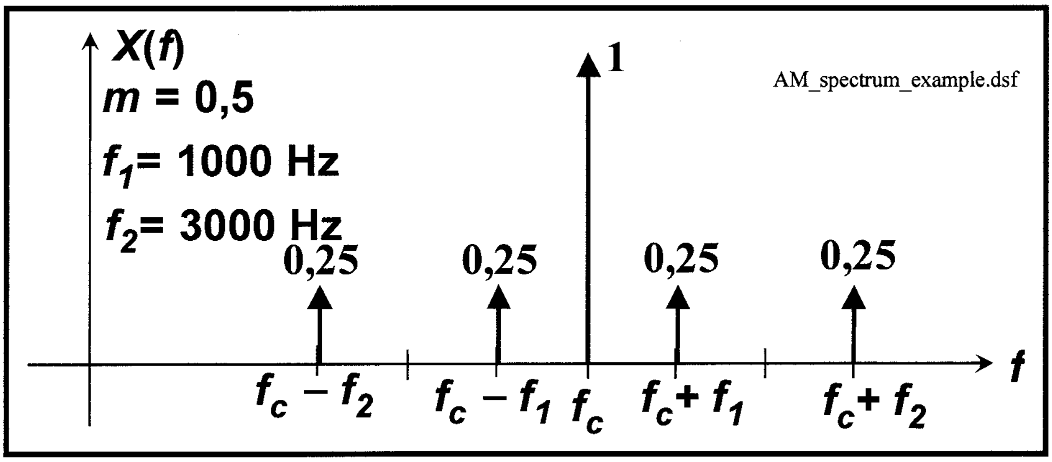
$$m(1 + 1) \le 1 \rightarrow m \le 1/2 = 0{,}5$$

b)

$$s(t) = \left(1 + m(\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)\right)\cos(2\pi f_c t)$$

$$= \cos(2\pi f_c t) + \frac{m}{2}\cos(2\pi(f_c - f_1)t) + \frac{m}{2}\cos(2\pi(f_c + f_1)t)$$

$$+ \frac{m}{2}\cos(2\pi(f_c - f_2)t) + \frac{m}{2}\cos(2\pi(f_c + f_2)t)$$



Arvostelu:

a) 5p

idea että moduloivan signaalin minimiarvo itseisarvoltaan pienempi kuin kantoaallon amplitudi, 2p

kyseisen minimiarvon määritys, 2p

modulaatioindeksin maksimiarvo, 1p

b) 5p

spektrin rakenteen idea vaikka kosinien summan perusteella, 1p

oikeat taajuudet, 2p

oikeat amplitudit, 2p